

Media armonica

- Per una *distribuzione unitaria* di un *carattere quantitativo* di N termini, la ***media armonica*** è definita come

$$\mu_a = \frac{N}{1/x_1 + 1/x_2 + \dots + 1/x_N} = N / \sum_{i=1}^N \frac{1}{x_i}$$

- E’ tipicamente applicata per calcolare il ***tempo medio*** per compiere una certa operazione in quanto le quantità $1/x_i$ misurano la *produttività* (numero di operazioni compiute nell’unità di tempo).
- Per una *distribuzione di frequenza non in classi*, la ***media armonica*** può essere calcolata come

$$\mu_a = \frac{N}{n_1/x_1 + n_2/x_2 + \dots + n_k/x_k} = N / \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{x_i}$$

oppure, utilizzando le frequenze relative, come

$$\mu_a = \frac{1}{f_1/x_1 + f_2/x_2 + \dots + f_k/x_k} = 1 / \sum_{i=1}^k \frac{f_i}{x_i}$$

- Se il *carattere è in classi* si utilizzano i *valori centrali*

$$x_i = \frac{c_{i-1} + c_i}{2}$$

al posto delle modalità.

Esempio

- Si consideri il tempo impiegato (in minuti) per terminare un certo prodotto da 4 operai di una certa azienda.

Unità (i)	Tempo impiegato (x_i)	Produttività ($1/x_i$)
1	32	0,0313
2	28	0,0357
3	35	0,0286
4	31	0,0323
Totale	–	0,1279

- La produttività (numero di prodotti terminati in un minuto) media è

$$0,1279 / 4 = 0,03198$$

e quindi il tempo medio per terminare il prodotto è

$$\mu_a = 4 / 0,1279 = 31,274.$$

Proprietà della media armonica

- ***Proprietà 1 (di internalità):*** La media è sempre compresa tra il minimo e il massimo della distribuzione

$$y_1 \leq \mu_a \leq y_N$$

- ***Proprietà 2:*** La media armonica soddisfa la relazione

$$\mu_a \leq \mu_g \leq \mu \quad \text{per qualsiasi distribuzione}$$

- ***Proprietà 3: (invarianza rispetto a cambiamenti di scala)*** se a ogni termine della distribuzione viene applicata la trasformazione aX , allora la media geometrica sarà pari a

$$a\mu_a$$

Mediana

- Data una distribuzione secondo un *carattere quantitativo*, la ***mediana*** (m) è modalità del carattere che divide il collettivo in due gruppi di uguale numerosità in modo tale che:
 1. le unità del primo gruppo hanno una modalità inferiore (o uguale) a m ;
 2. le unità del secondo gruppo hanno una modalità superiore (o uguale) a m .
- Per calcolare la mediana di una *distribuzione unitaria* di un *carattere quantitativo* di N termini:
 1. si ordinano le modalità in modo non decrescente ottenendo

$$y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_N$$

2. se N è *dispari*: $\Rightarrow m = y_{(N+1)/2}$

mentre se N è *pari*: $\Rightarrow m = (y_{N/2} + y_{N/2+1})/2$

Esempio

- Si consideri la distribuzione del numero di figli per 5 famiglie italiane (2, 0, 2, 3, 1); la distribuzione ordinata è (0, 1, 2, 2, 3) da cui $m = y_3 = 2$.
- Se la distribuzione fosse (2, 0, 1, 2) si avrebbe $m = (y_2 + y_3)/2 = 1,5$

- Per una *distribuzione di frequenza non in classi*, la **mediana** può essere calcolata sulla base delle frequenze cumulate (N_i) come:

1. si individua la modalità x_h tale che: $N_{h-1} \leq N/2 < N_h$
2. se $N_{h-1} < N/2$: $\Rightarrow m = x_h$
 mentre se $N_{h-1} = N/2$: $\Rightarrow m = (x_{h-1} + x_h)/2$

Esempio

- La prima distribuzione del numero di figli in forma aggregata è

N. figli (x_i)	Frequenze (n_i)	Freq. cumulate (N_i)
0	1	1
1	1	2
2	2	4
3	1	5
Totale	5	–

Dato che $N/2 = 2,5$, con $h = 3$ si ha $N_{h-1} < N/2 < N_h$ da cui $m = 2$.

- Per la seconda distribuzione dell’esempio precedente si ha

N. figli (x_i)	Frequenze (n_i)	Freq. cumulate (N_i)
0	1	1
1	1	2
2	2	4
Totale	4	–

Dato che $N/2 = 2$, con $h = 3$ si ha $N_{h-1} = N/2 < N_h$ da cui $m = 1,5$.

- Se il *carattere è in classi*, per calcolare la **mediana**:

1. si individua la *classe mediana*, cioè la class $c_{h-1} - c_h$ tale che:

$$N_{h-1} \leq N/2 < N_h$$

2. sulla base dell’*ipotesi di uniforme distribuzione*,

$$m = c_{h-1} + \frac{N/2 - N_{h-1}}{n_h} d_h.$$

Esempio

- Per la distribuzione dell’altezza di 50 individui si ha

Altezza ($c_{i-1} - c_i$)	Frequenze (n_i)	Freq. cumulate (N_i)	Ampiezza di classe (d_i)
150-160	1	1	10
160-170	10	11	10
170-180	35	46	10
180-200	4	50	20
Totale	50	-	-

- Dato che $N/2 = 25$, la classe modale è 170-180 da cui

$$m = 170 + \frac{25 - 11}{35} \cdot 10 = 174$$

Proprietà della mediana

- ***Proprietà 1:*** La mediana minimizza la distanza di ogni modalità da una costante (sintetizza al meglio le osservazioni),

$$\sum_{i=1}^n |x_i - c| \quad \text{è minimo per} \quad c = m$$

- ***Proprietà 2 (di internalità):*** La media è sempre compresa tra il minimo e il massimo della distribuzione

$$y_1 \leq m \leq y_N$$

- ***Proprietà 3 (invarianza rispetto a trasformazioni lineari):*** se a ogni termine della distribuzione viene applicata la trasformazione $aX + b$, allora la mediana sarà pari a

$$am + b$$

Quantili

- Si definisce *quantile* corrispondente alla frazione l/t , la modalità (q) del carattere che divide il collettivo in due gruppi tali che:
 1. il primo gruppo ha numerosità Nl/t e le sue unità hanno una modalità inferiore (o uguale) a q ;
 2. il secondo gruppo ha numerosità $N(1-l/t)$ e le sue unità hanno una modalità superiore (o uguale) a q .
- La mediana è un caso particolare di *quantile* quando $l/t = 1/2$.
- Quando $t = 4$ si hanno i *quartili*:
 1. il *primo quartile* (q_1) corrisponde alla frazione $l/t = 1/4$;
 2. il *secondo quartile* (q_2) corrisponde alla mediana;
 3. il *terzo quartile* (q_3) corrisponde alla frazione $l/t = 3/4$.
- Per una *distribuzione di frequenza non in classi*, un quantile può essere calcolato sulla base delle frequenze cumulate (N_i) come:
 1. si individua la modalità x_h tale che: $N_{h-1} \leq Nl/t < N_h$
 2. se $N_{h-1} < Nl/t$: $\Rightarrow q = x_h$
mentre se $N_{h-1} = Nl/t$: $\Rightarrow q = (x_{h-1} + x_h)/2$

- Se il *carattere è in classi*, per calcolare un quantile:

1. si individua la classe $c_{h-1} - c_h$ tale che:

$$N_{h-1} \leq Nl/t < N_h$$

2. sulla base dell’*ipotesi di uniforme distribuzione*,

$$q = c_{h-1} + \frac{Nl/t - N_{h-1}}{n_h} d_h.$$

Esempio

- Per la distribuzione dell’altezza di 50 individui si ha

Altezza ($c_{i-1} - c_i$)	Frequenze (n_i)	Freq. cumulate (N_i)	Ampiezza di classe (d_i)
150-160	1	1	10
160-170	10	11	10
170-180	35	46	10
180-200	4	50	20
Totale	50	-	-

- Dato che $N/4 = 12,5$ e $3N/4 = 37,5$, il primo e il terzo quartile cadono nella classe 170–180 e sono pari rispettivamente a

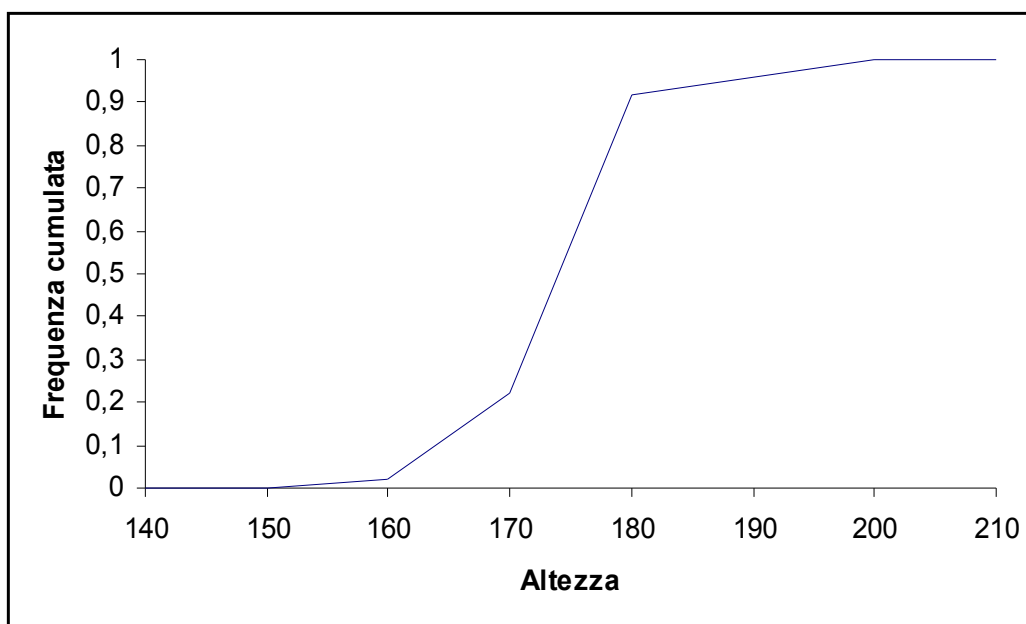
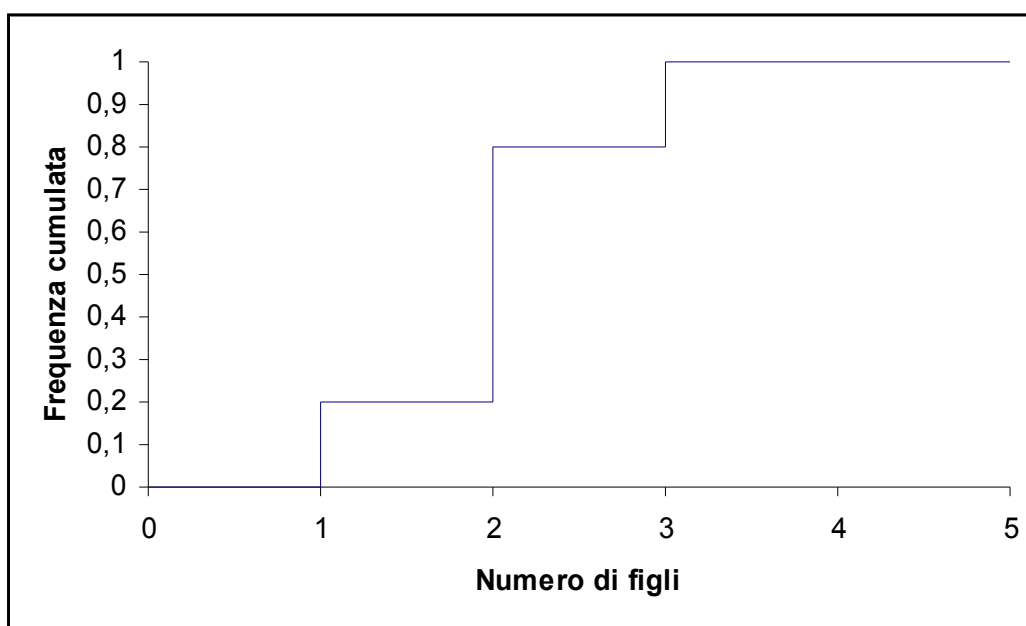
$$q_1 = 170 + \frac{12,5 - 11}{35} \cdot 10 = 170,43 \quad \text{e} \quad q_3 = 170 + \frac{37,5 - 11}{35} \cdot 10 = 177,57$$

- Un quantile può essere ricavato direttamente dalla *funzione di ripartizione* come la modalità x tale che

$$F(x) = l / t$$

e quindi può essere dedotto anche graficamente.

Esempi



Moda e classe modale

- Nel caso di una distribuzione di un *carattere non in classi*, la **moda** è definita come modalità del carattere che si presenta con la maggiore frequenza.
- Se il *carattere è in classi*, la **classe modale** è la classe che presenta la maggiore densità di frequenza.
- In alcuni casi la moda (o classe modale) può non essere unica; si ha quindi una **distribuzione plurimodale**.

Esempio

- Per la distribuzione dei voti in statistica, le modalità con maggiore frequenza sono 21 e 27 che si presentano 2 volte. La distribuzione è quindi plurimodale.
- Per la distribuzione dell’altezza di 50 individui si ha

Altezza ($c_{i-1} - c_i$)	Frequenze (n_i)	Freq. relative (f_i)	Ampiezza di classe (d_i)	Densità (h_i)
150–160	1	0,02	10	0,002
160–170	10	0,20	10	0,020
170–180	35	0,70	10	0,070
180–200	4	0,08	20	0,004
Totale	50	1,00	–	–

da cui la classe modale è la classe 170–180.

- La moda e la classe modale possono essere direttamente dedotte dal grafico della distribuzione.

Esempi

