

Variabile aleatoria (o casuale o stocastica):

è una quantità il cui valore è determinato da un esperimento casuale o aleatorio.

Associo un numero ad un evento, per esempio

esperimento: lancio una moneta

possibili risultati elementari:

$$\omega_1 = \text{TESTA} \rightarrow 1 = X(\omega_1)$$

$$\omega_2 = \text{CROCE} \rightarrow 0 = X(\omega_2)$$

in questo caso $\Omega = \{\omega_1 = T, \omega_2 = C\}$

ed $X(\omega)$ assume i valori 0 ed 1

DEFINIZIONE di VARIABILE ALEATORIA (VA):

è una funzione che associa un numero reale $X(\omega)$ ad un evento elementare ω di Ω

VA discreta: se lo spazio campionario è discreto quindi X può assumere un numero finito o un'infinità numerabile di valori (in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali)

ES: lancio di un dado - risultato di un'elezione

VA continua: se lo spazio campionario è continuo, se è costituito cioè da un'infinità non numerabile di eventi elementari

ES: tempo di funzionamento di un macchinario prima della rottura

Alla generica variabile aleatoria X si associa:

- funzione di ripartizione:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Questa definizione vale sia per VA discrete che continue

In particolare se la VA è **discreta** la funzione di ripartizione è a gradini. Se invece la VA è **continua** la funzione di ripartizione è continua.

- distribuzione di probabilità :

$$f_X(x) = P(X = x) \text{ (se } X \text{ è discreta)}$$

- o funzione di densità :

$$f_X(x) = F'_X(x) \text{ (se } X \text{ è continua)}$$

- media: $E(X)$

- varianza: $V(X)$

Nota la $f(X)$ posso ricavare tutto il resto

Nota la $F(x)$ posso ricavare tutto il resto

DISTRIBUZIONI discrete

Sono caratterizzate da:

$$f(x) = P(X = x)$$

$$E(X) = \sum_x xp(x) = \mu_X$$

$$V(X) = E(X - \mu_X)^2 = \sigma_X^2$$

MODELLI PROBABILISTICI NEL DISCRETO

Distribuzione Uniforme discreta:

i valori assunti sono:

$$X = 1, 2, \dots, N$$

le frequenze sono:

$$f(x) = 1/N \quad x = 1, 2, \dots, N$$

abbiamo che:

$$E(X) = \frac{N + 1}{2}$$

$$V(X) = \frac{N^2 - 1}{12}$$

formule ottenute sapendo che

$$\sum_{i=1}^N i = \frac{N(N + 1)}{2} \quad \sum_{i=1}^N i^2 = N(N + 1)(2N + 1)/6$$

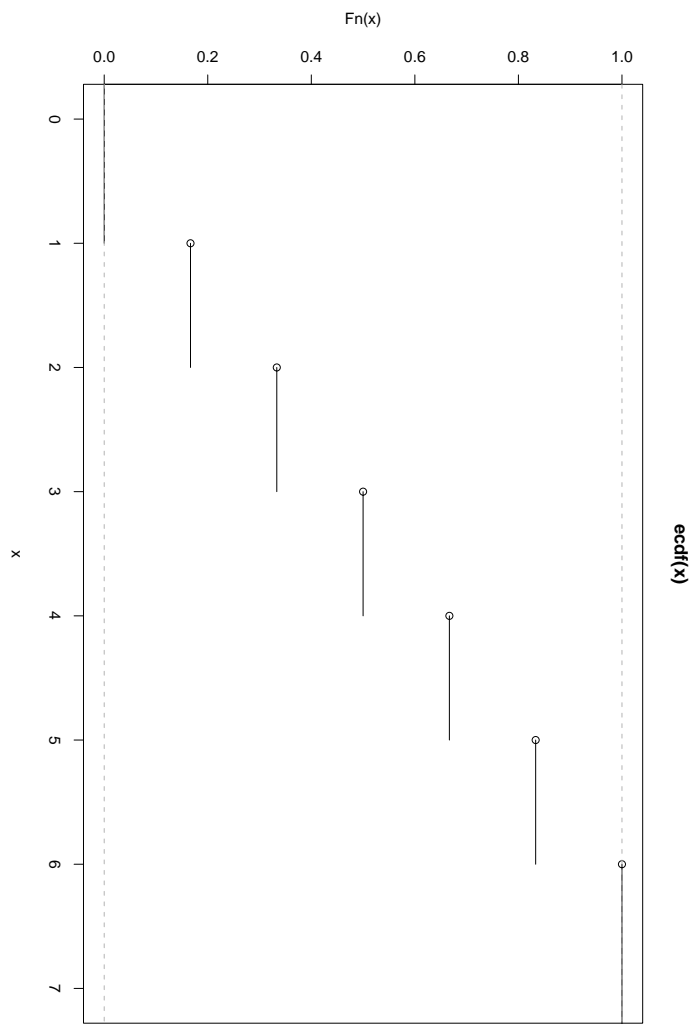
ESEMPIO: lancio un dado regolare, ho sei possibili esiti equiprobabili. L'esperimento del lancio di un dado può essere modellizzato da una variabile casuale con distribuzione uniforme discreta sui valori $X = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Avremo quindi che la funzione di probabilità è :

$$f(x) = 1/6, \quad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

inoltre

$$E(X) = 7/2 \quad \text{e} \quad V(X) = 11/12$$

In Figura è rappresentata la funzione di ripartizione della VA



Distribuzione Bernoulliana: questa distribuzione viene usata se l'esperimento aleatorio può assumere solo due possibili risultati (vero/falso, si/no, bianco/nero, favorevole/contrario).

Per esempio, se faccio un'indagine elettorale e chiedo agli intervistati se hanno votato per il partito del pensionati la risposta è di tipo SI/NO.

Associo alla risposta

SI il valore **1**

ed alla risposta

NO il valore **0**

(questa riclassificazione è del tutto arbitraria e avrei potuto fare anche il contrario)

Ogni singola intervista rappresenta un esperimento di tipo bernoulliano.

X assume solo i valori 0 ed 1

$$P(X = 1) = p$$

$$P(X = 0) = 1 - p$$

$$f(x) = p^x(1 - p)^{(1-x)}$$

$$E(X) = 1 * p + 0 * (1 - p) = p$$

$$E(X^2) = 1^2 p + 0^2(1 - p) = p$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

Distribuzione Binomiale: si ottiene una distribuzione binomiale quando ripeto n volte un esperimento di tipo bernoulliano avendo cura che le ripetizioni siano fra loro **indipendenti** ed avvengano nelle stesse condizioni (**identicamente distribuite**).

Nell'esempio precedente, se l'esperimento consiste nell'intervistare n elettori e mi assicuro che le risposte degli uni non influenzino le risposte degli altri allora possiamo descrivere l'esperimento con una distribuzione binomiale.

Indichiamo con X gli n esperimenti Bernoulliani sottostanti. Supponiamo che siano fra di loro *indipendenti* ed *identicamente distribuiti*:

$$X_i \sim Ber(p) \quad i = 1, \dots, n$$

Indichiamo con

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i$$

avremo allora che Y ha una distribuzione Binomiale di parametri n e p e indichiamo questo così :

$$Y \sim \text{Bin}(n, p)$$

avremo che Y assume valori $0, 1, \dots, n$ e la funzione di probabilità di Y è

$$f(Y = y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{(n-y)} \quad y = 1, 2, \dots, n$$

dove

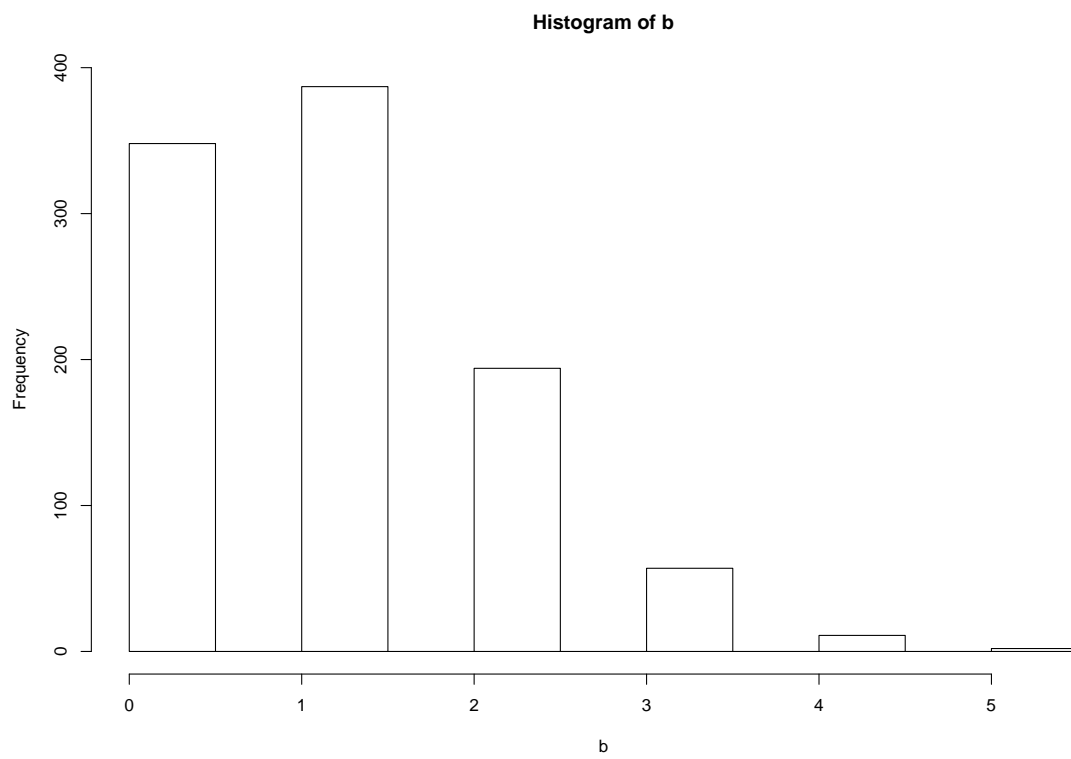
$$\binom{n}{y} = \frac{n!}{y!(n-y)!}$$

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = np$$

$$V(Y) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) = np(1-p)$$

ESEMPIO: un processo produttivo produce pezzi difettosi con probabilità pari a 0.1. Quale è la probabilità che su 10 pezzi prodotti che ne sia uno (due, tre, ... dieci) difettoso?

x	$f(x)$
0	0.348
1	0.387
2	0.194
3	0.057
4	0.011
5	0.001
6	0
7	0
8	0
9	0
10	0



Distribuzione Poissoniana: si tratta di una distribuzione usata per caratteri **DISCRETI NON NEGATIVI** cioè i valori assunti sono $X = 0, 1, 2, 3, \dots$. Si usa per contare il numero di eventi che avvengono in un certo intervallo di tempo o di spazio (pesci che abboccano all'amo in una giornata, telefonate che arrivano al centralino in un'ora, incidenti alla settimana, numero di auto che si presentano ad un parcheggio ...)

La distribuzione è indicizzata ad un parametro, λ che rappresenta la media della distribuzione ed è sempre $\lambda > 0$.

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \dots$$

$$E(X) = \lambda$$

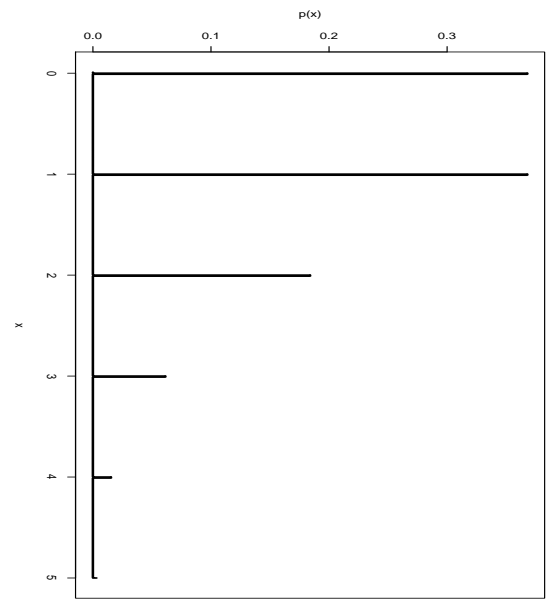
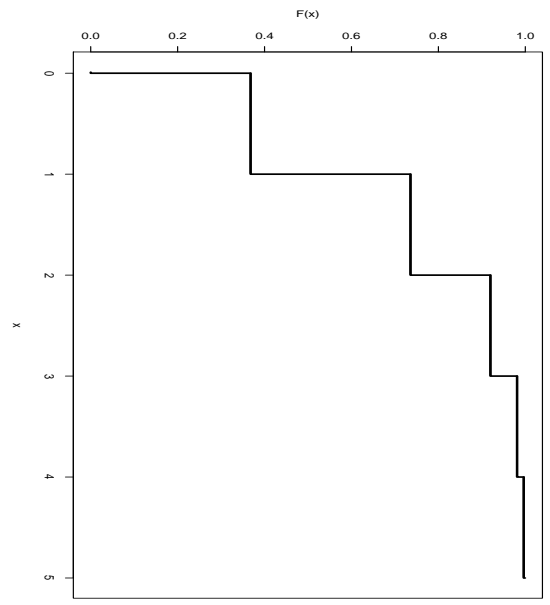
$$V(X) = \lambda$$

In Figura 1 è riportato il diagramma delle frequenze relative

In Figura 2 è riportata la funzione di ripartizione per una distribuzione di Poisson con media = 1.

Poichè il supporto della distribuzione sono tutti gli interi non negativi abbiamo troncato nei grafici l'asse delle ascisse al valore 5.

Si noti però che la frequenza relativa con cui si osservano 5 eventi è già molto bassa e come i gradini della funzione di ripartizione sono sempre più piccoli.



Legame fra Binomiale e Poisson

se n è grande e p è piccolo la distribuzione Binomiale può essere ben approssimata con una Poisson dove $\lambda = np$

Si ha una buona approssimazione quando

$$n/p > 500$$

Esempio:

$$X \sim \text{Bin}(n = 15, p = 0.1)$$

$$Y \sim P(\lambda = 15 * 0.1 = 1.5)$$

num. successi	X	Y
0	0.206	0.223
1	0.343	0.335
2	0.267	0.251
3	0.128	0.125
4	0.043	0.047
5	?	?
6	?	?
7	?	?
8	0	0
9	0	0
10	0	0
.	.	.

completate voi la tabella!