

## Verifica delle ipotesi

**ESEMPIO:** quelli di “Striscia la Notizia” effettuano controlli casuali per vedere se le pompe di benzina erogano effettivamente quanto dichiarato. Effettuano 20 controlli prendendo un contenitore da 15 litri e riempiendolo: 4 dei controlli mostrano che la benzina erogata è minore di quella dichiarata.

Alla luce dei risultati dei controlli di quelli di “Striscia” riteniamo che gli erogatori di benzina siano “truccati”? O che almeno una proporzione, (quale?) di erogatori sia “truccata”?

La risposta a questa domanda avrà un carattere incerto perchè è basata su di un campione di osservazioni.

Notiamo che quando si fanno i controlli quelli di “Striscia” concedono un margine di errore (legale). E’ come dire: concediamo che alcune delle pompe di benzina di fatto non siano perfettamente tarate. Assumiamo che il margine di errore equivalga a concedere che la frazione di pompe di benzina che eroga meno di 15 litri è minore o uguale a 0.05 (5 %)

In termini statistici tutte le pompe di benzina costituiscono la nostra popolazione e la proporzione di pompe “truccate” nella popolazione è il parametro di interesse ( $p$ ).

Vogliamo verificare se  $p \leq 0.05$  (**Ipotesi nulla**,  $H_0$  o ipotesi di lavoro).

Il dubbio è che  $p > 0.05$  (**Ipotesi alternativa**,  $H_1$ )

Il numero degli erogatori truccati nel campione è una VA  $X$  con distribuzione

$$X \sim Bin(20, p)$$

e con  $E(X) = np = 20p$

Quindi se è valida l’ipotesi nulla,  $H_0$ , si ha

$$E(X) = 20 * 0.05 = 1$$

Nel campione osservato  $X = 4$ . La domanda è : questo valore rende “credibile” l’ipotesi nulla:  $p \leq 0.05$  o alla luce di questo risultato pensiamo sia più credibile l’ipotesi alternativa?

Possiamo rispondere a questa domanda considerando che, se ammettiamo che  $p = 0.05$ , allora  $X \sim Bin(20, 0.05)$  e si tratta di vedere se la differenza fra il *valore atteso di  $X$* ,  $E(X) = 1$ , ed il *valore osservato di  $X$* ,  $X = 4$ , è ragionevolmente attribuibile al caso

Nel nostro esempio abbiamo che

$$P(X \geq 4 | p = 0.05) = 1 - P(X \leq 3) = 0.0158$$

Questa probabilità è molto piccola e quindi il valore osservato di  $X$  si discosta fortemente dal suo valore atteso nell’ipotesi che  $p = 0.05$ .

Questo fatto (la discrepanza fra il valore osservato e quello atteso) può essere attribuito a due circostanze:

- è vera l'ipotesi  $p = 0.05$  e si è verificato un evento raro, inatteso, ma pur sempre possibile
- è vera l'ipotesi alternativa  $p > 0.05$  sotto la quale l'evento osservato è molto più probabile e quindi il risultato campionario è più giustificato

Considerando che gli eventi poco probabili si verificano raramente è ragionevole dubitare che sia realmente  $p = 0.05$ . Inoltre, poichè l'evento  $X \geq 4$  è ancora meno probabile per un qualsiasi valore di  $p \leq 0.05$  sono portata a rifiutare l'ipotesi nulla!

Rifiutando l'ipotesi posso incorrere in un'errore se di fatto si è verificato un evento raro.

Questo errore si chiama **Errore di primo tipo** e si commette se rifiuto l'ipotesi nulla quando nella realtà essa è vera

L'altro tipo di errore che posso commettere nella verifica di ipotesi si ha quando accetto l'ipotesi nulla quando essa è falsa. Questo si chiama **Errore di secondo tipo**

**NOTA BENE:** quelli di “Striscia” di fatto mostrano in TV solo i controlli andati male e non dicono quanto ampio è il campione considerato! L'ampiezza del campione può fare la differenza!

- **Ipotesi parametriche**: cioè ipotesi sui parametri ( $\theta$ ) di una popolazione, avendo assunto un modello,  $f(x; \theta)$ , per la popolazione stessa
- **Ipotesi statistica**: affermazione o congettura riguardante un parametro  $\theta$  che compare nel modello descrittivo della popolazione  $f(x; \theta)$ .
- **Ipotesi nulla** ( $H_0$ ) è l'ipotesi sottoposta a verifica
- **Ipotesi alternativa** ( $H_1$ ) è l'affermazione o congettura contrapposta a quella sottoposta a verifica
- **Test di significatività**: procedimento con il quale si decide, alla luce di un campione, se rifiutare o meno l'ipotesi nulla

- **Livello di significatività** =  $\alpha$  = rappresenta la probabilità di rifiutare l'ipotesi nulla quando essa è vera cioè la **probabilità dell'errore di primo tipo**
- la **probabilità dell'errore di secondo tipo** si indica invece con  $\beta$
- $1 - \beta$  = potenza del test
- Nella prova delle ipotesi classiche il test viene costruito **fissando  $\alpha$  piccolo a piacere e cercando di minimizzare  $\beta$ .**
- Questo porta a scegliere l'ipotesi nulla come l'ipotesi che porta a conseguenze più gravi se rifiutata quando è vera
- Si procede in questo modo poichè non è possibile, fissata l'ampiezza campionaria, rendere piccole contemporaneamente entrambe le probabilità di errore. In generale, infatti, se si rimpicciolisce la probabilità di errore di prima specie, si aumenta la probabilità di errore di seconda specie, e viceversa

**ESEMPIO:** Il Comune di ZZZ deve valutare se sospendere

la circolazione delle auto la prossima domenica.

Ai fini della decisione, dispone delle rilevazioni del livello delle polveri fini nell'aria effettuate in  $n$  centraline. Se il livello delle polveri è superiore ad una certa soglia, si rende opportuna la limitazione della circolazione delle auto.

Il livello delle polveri fini nell'aria è incognito, e possiamo pensare di descriverlo come un numero aleatorio  $X$ , con valore atteso  $E(X) = \mu$  ("livello medio delle polveri nell'aria").

Se il livello medio delle polveri è superiore ad una certa soglia (che possiamo indicare con  $\mu_0$ ), cioè se  $\mu > \mu_0$ , si ritiene opportuno limitare il traffico, se invece  $\mu < \mu_0$  non si ritiene necessario.

Le ipotesi statistiche sono dunque  $\mu > \mu_0$  e  $\mu < \mu_0$

**Si sceglie come ipotesi nulla  $H_0$  quella che porta a conseguenze più gravi se rifiutata quando è vera**

Nel nostro caso, se rifiutiamo l'ipotesi  $\mu > \mu_0$  (dunque riteniamo inutile limitare il traffico) ed invece è vera, cioè il livello delle polveri fini è in realtà superiore al livello critico  $\mu_0$ , abbiamo la conseguenza di un possibile danno alla salute dei cittadini.

Se invece rifiutiamo l'ipotesi  $\mu < \mu_0$ , ed invece è vera, limitiamo inutilmente la circolazione delle auto, creando disagi inutili.

Quale dei possibili "danni" si ritiene più grave? E' una scelta soggettiva, ma una volta fatta determina quale sia l'ipotesi nulla.

Supponiamo di ritenere più grave il rischio di danno alla salute dei cittadini.

In tal caso, poniamo come ipotesi nulla  $H_0 : \mu \geq \mu_0$  e come ipotesi alternativa  $H_1 : \mu < \mu_0$ .

*Nota:* come regola pratica, il valore  $\mu = \mu_0$  si include sempre nell'ipotesi nulla

Costruire un test per  $H_0$  contro  $H_1$  significa fornire una regola che, per ogni possibile realizzazione campionaria (cioè per ogni possibile insieme di rilevazioni delle  $n$  centraline), ci dica se prendere la decisione di limitare la circolazione delle auto ("accettare  $H_0$ ") oppure sospendere tale provvedimento ("rifiutare  $H_0$ ").

Una volta osservati i dati forniti dalle centraline, la regola ci suggerirà se accettare o rifiutare  $H_0$ .

NOTA BENE: la verifica di ipotesi non ci dice se l'ipotesi nulla è **VERA** o **FALSA** ma solo se **ACCETTARLA** o **RIFIUTARLA**

## IPOTESI UNILATERALE

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  **noto**,

$$H_0 : \mu = \mu_0, H_1 : \mu = \mu_1 \text{ con } \mu_1 > \mu_0$$

oppure

$$H_0 : \mu = \mu_0, H_1 : \mu > \mu_0$$

$$H_0 : \mu \leq \mu_0, H_1 : \mu > \mu_0$$

- $H_0$  si ritiene inattendibile se  $\bar{X} > \mu_0$  e la distanza tra  $\bar{X}$  e  $\mu_0$  è elevata.
- La distanza tra  $\bar{X}$  e  $\mu_0$  può essere misurata tramite la probabilità

$$\gamma = P(\bar{X} > \bar{x} | \mu = \mu_0)$$

questa probabilità viene detta p-value quindi abbiamo che

$$\gamma = \text{p-value}$$

La regola dice che: rifiuto l'ipotesi nulla se il p-value è minore della probabilità di commettere un errore di prima specie cioè se

$$\gamma < \alpha$$

- fissato un **livello di significatività**  $\alpha$

usualmente 0,1; 0,05 o 0,01

La regola per verificare le ipotesi oggetto di studio si può esprimere in questi 3 modi diversi ma tutti fra loro equivalenti

– Si rifiuta  $H_0$  se:  $\gamma \leq \alpha$

– Si rifiuta  $H_0$  se:  $\bar{x} \geq \bar{x}_\alpha = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

– Si rifiuta  $H_0$  se:  $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_\alpha$

dove  $P(Z > z_\alpha) = \alpha$  con  $Z \sim N(0, 1)$ .

- **Zona di rifiuto:**

$$R = \{x : \bar{x} \geq \bar{x}_\alpha\}$$

oppure posso esprimere la stessa zona di rifiuto come

$$R = \{x : z \geq z_\alpha\}$$

- **Zona di accettazione:**

$$A = \{x : \bar{x} < \bar{x}_\alpha\}$$

oppure posso esprimere la stessa zona di accettazione

come

$$A = \{x : z < z_\alpha\}$$

- dove:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

e

$$\bar{x}_\alpha = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

# IPOSTESI UNILATERALE

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  **noto**,

$$H_0 : \mu = \mu_0, H_1 : \mu = \mu_1 \text{ con } \mu_1 < \mu_0$$

$$H_0 : \mu = \mu_0, H_1 : \mu < \mu_0$$

$$H_0 : \mu \geq \mu_0, H_1 : \mu < \mu_0$$

- $H_0$  si ritiene inattendibile se  $\bar{X} < \mu_0$  e la distanza tra  $\bar{X}$  e  $\mu_0$  è elevata.

- fissato un **livello di significatività**  $\alpha$ , la regola di decisione si può esprimere in questi 3 modi equivalenti:

- Si rifiuta  $H_0$  se:  $\gamma = P(\bar{X} \leq \bar{x} | \mu = \mu_0) \leq \alpha$

- Si rifiuta  $H_0$  se:  $\bar{x} \leq \bar{x}_\alpha = \mu_0 - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

- Si rifiuta  $H_0$  se:  $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_\alpha$ .

- **Zona di rifiuto:**

$$R = \{x : \bar{x} \leq \bar{x}_\alpha\}$$

oppure posso esprimere la stessa zona di rifiuto come

$$R = \{x : z \leq -z_\alpha\}$$

- **Zona di accettazione:**

$$A = \{x : \bar{x} > \bar{x}_\alpha\}$$

oppure posso esprimere la stessa zona di accettazione

come

$$A = \{x : z > z_\alpha\}$$

# IPOSTESI BILATERALE

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  **noto**,  $H_0 : \mu = \mu_0$ ,  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ .
- fissato un **livello di significatività**  $\alpha$ , la regola di decisione si può esprimere in questi 3 modi equivalenti:

– si rifiuta se:  $P(\bar{X} \leq \bar{x} | \mu = \mu_0) \leq \alpha/2$  oppure

$$P(\bar{X} \geq \bar{x} | \mu = \mu_0) \leq \alpha/2$$

In altre parole si rifiuta se

$$\gamma = 2P(\bar{X} \geq |\bar{x}| | \mu = \mu_0) \leq \alpha$$

– oppure se:  $\bar{x} \leq \bar{x}'_{\alpha/2} = \mu_0 - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  oppure

$$\bar{x} \geq \bar{x}_{\alpha/2} = \mu_0 + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

– oppure se:  $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_{\alpha/2}$  oppure

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_{\alpha/2}.$$

- **Zona di rifiuto:**

$$R = \{x : \bar{x} \leq \bar{x}'_{\alpha/2} \text{ o } \bar{x} \geq \bar{x}_{\alpha/2}\}$$

oppure posso esprimere la stessa zona di rifiuto come

$$R = \{x : |z| \geq z_{\alpha/2}\}$$

- **Zona di accettazione:**

$$A = \{x : \bar{x}'_{\alpha/2} < \bar{x} < \bar{x}_{\alpha/2}\}$$

oppure posso esprimere la stessa zona di accettazione

come

$$A = \{x : |z| < z_{\alpha/2}\}$$

# Verifica di ipotesi sulla media

## con varianza NON NOTA

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , con  $\sigma^2$  **non nota**,  $H_0 : \mu = \mu_0$ .

- Si utilizza la statistica test

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

- **Se**  $H_1 : \mu > \mu_0$ , si rifiuta se:  $P(T \geq t | \mu = \mu_0) \leq \alpha$

zona di rifiuto:  $R = \{t : t \geq t_\alpha\}$

dove  $P(T \geq t_\alpha) = \alpha$ .

- **Se**  $H_1 : \mu < \mu_0$ , si rifiuta se:  $P(T \leq t | \mu = \mu_0) \leq \alpha$

zona di rifiuto:  $R = \{t : t \leq -t_\alpha\}$ .

- **Se**  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ , si rifiuta se:  $2P(T \geq |t| | \mu = \mu_0) \leq \alpha$

zona di rifiuto:  $R = \{t : |t| \geq t_{\alpha/2}\}$ .

**ESERCIZIO:** Supponiamo che l'affitto mensile di un bilocale nel Comune di AAA sia descritto da un numero aleatorio  $X$ , con distribuzione  $N(\mu, \sigma^2)$ . In un'indagine su un campione casuale di 10 bilocali, si è osservato un affitto medio mensile  $\bar{x} = 800$  euro, ed una varianza pari a  $\hat{\sigma}^2 = 450$ . Si vuole verificare l'ipotesi che l'affitto medio  $\mu$  sia  $\geq 900$  euro. Sulla base dei dati osservati, accettereste o rifiutereste l'ipotesi nulla, al livello  $\alpha = 0.05$ ?

**RISPOSTA:** L'affitto  $X$  ha distribuzione  $N(\mu, \sigma^2)$ , con  $\mu$  e  $\sigma^2$  entrambi incogniti.

Si rifiuterà  $H_0 : (\mu \geq 900)$  se la statistica test

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

risulterà  $\leq t_{0.05}^{(9)}$ . Ricordiamo che  $T \sim \mathcal{T}^{(9)}$  se  $\mu = 900$

Dai dati rilevati si trova:  $\bar{x} = 800$ ,  $\hat{\sigma}^2 = 450$ ,  $S^2 = \frac{450 \cdot 10}{9} = 500$ ,  $\frac{S}{\sqrt{n}} = 7.07$  e infine  $t_{0.05}^{(9)} = -1.833 = \text{qt}(0.05, \text{df}=9)$ .

Poichè  $T = \frac{800-900}{7} = -14.14 < -1.833$ , si rifiuta  $H_0$

In alternativa pervengo alla stessa conclusione se calcolo:

$$\mu_0 - t_{0.05}^{(9)} * \frac{S}{\sqrt{n}} = 900 - 1.833 * \frac{\sqrt{500}}{\sqrt{10}} = 887.04$$

e lo confronto con la media campionaria. Poichè la media campionaria (800) è minore della soglia critica (887) rifiuto l'ipotesi nulla.

Infine posso calcolare il p-value:

$$\gamma = pt(-14.14, df = 9) = 9.40905e - 0.8 \approx 0$$

poichè il p-value è minore di  $\alpha$  rifiuto l'ipotesi nulla.

- Per una popolazione qualsiasi,

- nel caso di grandi campioni

- Si utilizza la statistica test

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

che ha distribuzione, sotto  $H_0$ , approssimata  $N(0, 1)$  quando

$n$  è suff. grande ( $n \geq 50$ )

# VERIFICA DI IPOTESI SU UNA PROPORZIONE

- $X \sim \text{Ber}(p)$ ,  $H_0 : p = p_0$ ,

nel caso di **grandi campioni**

- Si utilizza la statistica test

$\bar{X} \sim N(p, p(1-p)/n)$  approssimativamente e se è vera ipotesi nulla

- **Se  $H_1 : p > p_0$** , si rifiuta se:  $P(\bar{X} \geq \bar{x} | p = p_0) \leq \alpha$

zona di rifiuto:  $R = \{x : \bar{x} \geq \bar{x}_\alpha\}$ ,

dove  $\bar{x}_\alpha = p_0 + z_\alpha \sqrt{p_0(1-p_0)/n}$ , con  $Z \sim N(0, 1)$ .

- **Se  $H_1 : p < p_0$** , si rifiuta se:  $P(\bar{X} \leq \bar{x} | p = p_0) \leq \alpha$

zona di rifiuto:  $R = \{x : \bar{x} \leq \bar{x}'_\alpha\}$ .

dove  $\bar{x}'_\alpha = p_0 - z_\alpha \sqrt{p_0(1-p_0)/n}$ .

- **Se  $H_1 : p \neq p_0$** , si rifiuta se:  $P(\bar{X} \leq \bar{x} | p = p_0) \leq \alpha/2$  o

$$P(\bar{X} \geq \bar{x} | p = p_0) \leq \alpha/2$$

zona di rifiuto:  $R = \{x : \bar{x} \leq \bar{x}'_{\alpha/2} \text{ oppure } \bar{x} \geq \bar{x}_{\alpha/2}\}$ .

**ESERCIZIO:** In un'indagine della Camera di Commercio di BBB ad un campione casuale di aziende si chiede se esportano all'estero. Descriviamo i risultati campionari come un vettore aleatorio  $(X_1, \dots, X_n)$  dove  $X_i = 1$  se la risposta è positiva e  $X_i = 0$  in caso contrario. Immaginiamo che, su un campione di 100 aziende, 42 rispondano di sì .

(a) Stimare la proporzione  $\theta$  di aziende che esportano all'estero, fornendo una stima puntuale ed un intervallo di confidenza asintotico di livello 0.98.

(b) Rifiuteremmo l'ipotesi  $H_0$ : la percentuale di aziende che esportano all'estero è superiore al 44%, al livello di significatività del 2%?

(c) Calcolate il p-value per la verifica di ipotesi al punto precedente

**RISPOSTA:** La popolazione è  $X \sim \text{bernoulliana}(\theta)$ .

(a) La stima di  $\theta$  è data dalla media campionaria  $\bar{x} = 0.42$ .

Poichè  $n = 100$  si può ritenere sufficientemente grande, possiamo utilizzare un intervallo di confidenza asintotico per

$\theta$ , basato sulla quantità ausiliaria

$$\frac{\bar{X} - \theta}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}} \approx N(0, 1) \text{ se } n \text{ è sufficientemente grande.}$$

La formula dell'intervallo asintotico è

$$\left[ \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right].$$

Nel nostro caso:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 0.42, \\ \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} &= 0.0493, \\ z_{0.01} &= 2.326, \end{aligned}$$

perciò l'intervallo asintotico per la proporzione di aziende che esportano all'estero  $\theta$  è

$$[0.305, 0.5348].$$

(b) Possiamo utilizzare un test asintotico, basato sulla statistica test

$$Z = \frac{\bar{X} - \theta_0}{\sqrt{\frac{\theta_0(1-\theta_0)}{n}}} = \frac{\bar{X} - 0.44}{0.0496} \approx N(0, 1) \text{ se } \theta = 0.44$$

Rifiuteremo  $H_0$  se  $z \leq -z_{0.02} = -2.054 = qnorm(0.02)$ .

Poichè risulta  $z = -0.403 > -2.054$ , accetto  $H_0$ .

In alternativa pervengo alla stessa conclusione se confronto

$\bar{X}$  con  $\bar{x}_\alpha$ .

In particolare abbiamo che:

$$\bar{x}_\alpha = \theta_0 - z_\alpha \sqrt{\frac{\theta_0(1-\theta_0)}{n}} = 0.44 + qnorm(0.02)0.0496 = 0.338$$

Poichè  $\bar{X} = 0.42$  è maggiore di  $\bar{x}_\alpha = 0.338$  accetto l'ipotesi nulla.

(c)

$$\gamma = P(\bar{X} < 0.42 | \theta = 0.44)$$

$$\gamma = P\left(Z < \frac{0.42 - 0.44}{\sqrt{\frac{0.44(1-0.44)}{100}}}\right)$$

$$\gamma = P(Z < -0.403) = 0.34 = pnorm(-0.403)$$

poichè  $\gamma > \alpha$  accettiamo l'ipotesi nulla.

Se il valore della media campionaria osservato fosse stato pari a 0.55 come cambia il p-value e la decisione?

In questo caso abbiamo che

$$\gamma = P(\bar{X} < 0.55 | \theta = 0.44)$$

$$\gamma = P\left(Z < \frac{0.55 - 0.44}{\sqrt{\frac{0.44(1-0.44)}{100}}}\right)$$

$$\gamma = P(Z < 2.21) = 0.98$$

Quindi continuo a accettare l'ipotesi nulla con ancora maggior confidenza

Se infine il valore della media campionaria osservato fosse stato pari a 0.3 come cambia il p-value e la decisione?

In questo caso abbiamo che

$$\begin{aligned}\gamma &= P(\bar{X} < 0.3 | \theta = 0.44) \\ \gamma &= P\left(Z < \frac{0.3 - 0.44}{\sqrt{\frac{0.44(1-0.44)}{100}}}\right) \\ \gamma &= P(Z < -2.82) = 0.0024\end{aligned}$$

In questo caso invece rifiuto l'ipotesi nulla perchè il p-value è minore di  $\alpha$  infatti  $0.002 < 0.02$

Se infine il valore della media campionaria osservato fosse stato pari a 1 come cambia il p-value e la decisione?

In questo caso abbiamo che

$$\begin{aligned}\gamma &= P(\bar{X} < 1 | \theta = 0.44) \\ \gamma &= P\left(Z < \frac{1 - 0.44}{\sqrt{\frac{0.44(1-0.44)}{100}}}\right) \\ \gamma &= P(Z < 11.28) = 1\end{aligned}$$

In questo caso accetto l'ipotesi nulla e sono molto confidente nel farlo.  $0.002 < 0.02$

# Verifica di ipotesi sulla differenza tra due medie

## VARIANZE NOTE

- $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ,  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$  note,

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ . Si utilizza la statistica test

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N(0, \sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2) \quad \text{sotto } H_0.$$

dove  $n_1$  e  $n_2$  sono le due ampiezze campionarie

- **Se  $H_1 : \mu_1 > \mu_2$**

si rifiuta se:  $\gamma = P(\bar{X} - \bar{Y} \geq \bar{x} - \bar{y} | \mu_1 = \mu_2) \leq \alpha$

zona di rifiuto:  $R = \{x, y : \bar{x} - \bar{y} \geq z_\alpha \sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}\}$

dove  $\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}} = \sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}$ .

- **Se  $H_1 : \mu_1 < \mu_2$**

si rifiuta se:  $\gamma = P(\bar{X} - \bar{Y} \leq \bar{x} - \bar{y} | \mu_1 = \mu_2) \leq \alpha$

zona di rifiuto:  $R = \{x, y : \bar{x} - \bar{y} \leq -z_\alpha \sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}\}$ .

- **Se  $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ ,**

zona di rifiuto:  $R = \{x, y : |\bar{x} - \bar{y}| \geq z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}\}$ .

# VARIANZE NON NOTE

- $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ ,  $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  non noto,

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ . Si utilizza la statistica test

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{S_c^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \sim t(n_1 + n_2 - 2) \quad \text{sotto } H_0.$$

dove  $S_c^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$ .

- **Se**  $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ ,

si rifiuta se:  $\gamma = P(T \geq t | \mu_1 = \mu_2) \leq \alpha$

zona di rifiuto:  $R = \{t : t \geq t_\alpha\}$

dove  $P(T \geq t_\alpha) = \alpha$ .

- **Se**  $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ ,

si rifiuta se:  $\gamma = P(T \leq t | \mu_1 = \mu_2) \leq \alpha$

zona di rifiuto:  $R = \{t : t \leq -t_\alpha\}$ .

- **Se**  $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ ,

si rifiuta se:  $\gamma = 2P(T \geq |t| | \mu_1 = \mu_2) \leq \alpha$

zona di rifiuto:  $R = \{t : |t| \geq t_{\alpha/2}\}$ .

**ESERCIZIO:**  $X$  e  $Y$  sono numeri aleatori indipendenti e rappresentano le esportazioni di due prodotti.

Indichiamo con  $\mu_x$  e  $\sigma_x^2$  il valore atteso e la varianza di  $X$  e con  $\mu_y$  e  $\sigma_y^2$  il valore atteso e la varianza di  $Y$ .

Si vuole stimare la differenza fra le esportazioni medie,  $\theta = \mu_x - \mu_y$ . A tal fine si estrae un campione casuale  $(X_1, \dots, X_n)$  dalla popolazione  $X$  e un campione casuale  $(Y_1, \dots, Y_n)$  da  $Y$ , e si propone lo stimatore  $T = \bar{X} - \bar{Y}$

- (a) Calcolate l'errore quadratico medio dello stimatore  $T$ .
- (b) Calcolate la stima di  $\theta$  sapendo che

$$n = 50, \quad \sum_{i=1}^n x_i = 75000, \quad \sum_{i=1}^n y_i = 62500,$$

**RISPOSTA:**

- (a) Il valore atteso dello stimatore  $T$  è

$$E(T) = E(\bar{X} - \bar{Y}) = E(\bar{X}) - E(\bar{Y}) = \mu_x - \mu_y = \theta,$$

quindi  $T$  è non distorto per  $\theta$ , ed il suo errore quadratico medio coincide con la sua varianza. Si ha

$$V(T) = V(\bar{X} - \bar{Y}) = V(\bar{X}) + V(\bar{Y}) = \frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{n}$$

nota che non compare il termine  $-2Cov(\bar{X}, \bar{Y})$  poichè è nullo per l'ipotesi di indipendenza fra i due campioni

(b) La stima di  $\theta$  è

$$\bar{x} - \bar{y} = \frac{75000}{50} - \frac{62500}{50} = 1500 - 1250 = 250$$

(c) Sapendo che

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 4320000 \quad , \quad \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = 12000000$$

Costruite ora un test di livello  $\alpha = 0.02$  per verificare se  $\mu_x \leq \mu_y$  o invece  $\mu_x > \mu_y$ , spiegando quali ipotesi avete introdotto sulle popolazioni  $X$  e  $Y$ .

Calcolate inoltre il p-value.

## **RISPOSTA**

Ipotizziamo che  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$  e

$$X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2) \quad , \quad Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2) \quad ,$$

Il test si basa sulla differenza fra le due medie campionarie

$T = \bar{X} - \bar{Y}$ . Si ha:

$$V(T) = \frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y} = \sigma^2 \frac{2}{50} = \sigma^2 0.04 \quad .$$

Uno stimatore non distorto per  $\sigma^2$  è

$$S_c^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{2n - 2} = \frac{16320000}{100 - 2} = 166530.6$$

quindi  $S_c = 408$ .

La statistica test per

$H_0 : \mu_x - \mu_y \leq 0$  contro  $H_1 : \mu_x - \mu_y > 0$  è

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{408 \cdot 0.2} \sim \mathcal{T}^{(98)} \quad \text{se } \mu_x - \mu_y = 0 .$$

Si rifiuta  $H_0$  per "valori grandi" di  $T$ ; precisamente, se  $\alpha = 0.02$ , si rifiuta  $H_0$  per  $T \geq t_{.02}^{(98)} = 2.08 = qt(0.98, df = 98)$ .

Poichè risulta  $T = 3.06$  che è maggiore del valore critico 2.08, si rifiuta  $H_0$

Il p-value è pari a

$$\gamma = P(\bar{X} - \bar{Y} > 250 | \mu_x = \mu_y)$$

$$\gamma = P(T^{98} > 3.06) = 0.001 = 1 - pt(3.06, df = 98) \approx pnorm(3.06)$$

(quest'ultimo valore lo si trova sulle tavole della distribuzione T-student con 98 gradi di libertà oppure lo chiedo ad R).

Poichè il p-value è minore di  $\alpha$  rifiuto l'ipotesi nulla

- **Per due popolazioni qualsiasi, nel caso di grandi campioni.** Si utilizza la seguente statistica test:

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N(0, S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2) \quad \text{appross., sotto } H_0.$$

- **Se  $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ ,** si rifiuta se:

$$\gamma = P(\bar{X} - \bar{Y} \geq \bar{x} - \bar{y} | \mu_1 = \mu_2) \leq \alpha$$

$$\text{zona di rifiuto: } R = \{x, y : \bar{x} - \bar{y} \geq z_\alpha \hat{\sigma}_{\bar{X}-\bar{Y}}\}$$

$$\text{dove } \hat{\sigma}_{\bar{X}-\bar{Y}} = \sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}.$$

- **Se  $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ ,** si rifiuta se:

$$\gamma = P(\bar{X} - \bar{Y} \leq \bar{x} - \bar{y} | \mu_1 = \mu_2) \leq \alpha$$

$$\text{zona di rifiuto: } R = \{x, y : \bar{x} - \bar{y} \leq -z_\alpha \hat{\sigma}_{\bar{X}-\bar{Y}}\}.$$

- **Se  $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ ,**

$$\text{zona di rifiuto: } R = \{x, y : |\bar{x} - \bar{y}| \geq z_{\alpha/2} \hat{\sigma}_{\bar{X}-\bar{Y}}\}.$$

# Verifica di ipotesi sulla differenza tra due proporzioni

- $X \sim \text{Bin}(1, p_1)$ ,  $Y \sim \text{Bin}(1, p_2)$ ,  $H_0 : p_1 = p_2 = p$ ,

**per grandi campioni.** Si utilizza la statistica test

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N \left[ 0, p(1-p) \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \right] \text{ appross., sotto } H_0.$$

- **Se  $H_1 : p_1 > p_2$** , si rifiuta se:

$$\gamma = P(\bar{X} - \bar{Y} \geq \bar{x} - \bar{y} | p_1 = p_2) \leq \alpha$$

$$\text{zona di rifiuto: } R = \{x, y : \bar{x} - \bar{y} \geq z_\alpha \hat{\sigma}_{\bar{X} - \bar{Y}}\}$$

$$\text{dove } \hat{\sigma}_{\bar{X} - \bar{Y}} = \sqrt{p(1-p) (1/n_1 + 1/n_2)}.$$

- **Se  $H_1 : p_1 < p_2$** , si rifiuta se:

$$\gamma = P(\bar{X} - \bar{Y} \leq \bar{x} - \bar{y} | p_1 = p_2) \leq \alpha$$

$$\text{zona di rifiuto: } R = \{x, y : \bar{x} - \bar{y} \leq -z_\alpha \hat{\sigma}_{\bar{X} - \bar{Y}}\}.$$

- **Se  $H_1 : p_1 \neq p_2$** , zona di rifiuto:

$$R = \{x, y : |\bar{x} - \bar{y}| \geq z_{\alpha/2} \hat{\sigma}_{\bar{X} - \bar{Y}}\}.$$

**ESERCIZIO:** devo valutare due potenziali mercati per uno dei miei prodotti. A tal fine intervisto 65 soggetti sul primo mercato e 75 soggetti sul secondo mercato chiedendo se comprerebbero il mio prodotto. Nel primo mercato 52 soggetti rispondono affermativamente. Nel secondo mercato 57 soggetti rispondono affermativamente. Alla luce di questi risultati campionari verificate l'ipotesi di lavoro che i due mercati siano equivalenti e che il 50% dei soggetti comprerà il mio prodotto contro l'alternativa che il primo mercato sia migliore del secondo avendo fissato  $\alpha = 0.05$

**SOLUZIONE:** abbiamo che  $n_1 = 65$ ,  $n_2 = 75$ ,  $\bar{x} = 0.8$ ,  $\bar{y} = 0.76$  e infine  $p = 0.5$  e  $H_1 : p_1 \geq p_2$ . Inoltre risulta

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}-\bar{Y}} = \sqrt{p(1-p)(1/n_1 + 1/n_2)} = \sqrt{0.5 * 0.5 * (1/65 + 1/75)} = 0.085$$

$$z_\alpha \hat{\sigma}_{\bar{X}-\bar{Y}} = 1.65 \times 0.085 = 0.14$$

Quindi la regione di rifiuto dell'ipotesi nulla è

$$R = \{x, y : \bar{x} - \bar{y} \geq z_\alpha \hat{\sigma}_{\bar{X} - \bar{Y}}\} = \{x, y : \bar{x} - \bar{y} \geq 0.14\}$$

Nel nostro caso, sul campione estratto, la statistica test =  $\bar{x} - \bar{y} = 0.04$  quindi il nostro campione cade nella regione di accettazione e concludiamo di conseguenza di accettare l'ipotesi nulla.

## Verifica di ipotesi sulla varianza

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\mu$  **nota**,  $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ .

Si utilizza la statistica test

$$\hat{\sigma}^2 \sim \frac{\sigma_0^2}{n} \chi^2(n) \quad \text{sotto } H_0.$$

ovvero

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n) \quad \text{sotto } H_0.$$

Quindi calcolo  $\frac{\sum(X_i - \mu)}{\sigma_0}$  e lo confronto con i quantili della distribuzione chi-quadrato con  $n$  gradi di libertà

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\mu$  **non nota**,  $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ .

Si utilizza la statistica test

$$S^2 \sim \frac{\sigma_0^2}{n-1} \chi^2(n-1) \quad \text{sotto } H_0.$$

ovvero

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1) \quad \text{sotto } H_0.$$

Quindi calcolo  $\frac{\sum(X_i - \bar{X})}{\sigma_0}$  e lo confronto con i quantili della distribuzione chi-quadrato con  $(n-1)$  gradi di libertà

**ESERCIZIO** Per valutare la precisione di uno strumento di misura si effettuano 5 misurazioni con tale strumento e si vuole valutare se la varianza di queste misurazioni è maggiore (ipotesi di lavoro) o minore di 2. Fissiamo una probabilità di commettere un errore di prima specie pari a 0.05. Le misurazioni ottenute sono  $x = (3, 4.5, 2.2, 1.9, 3.5)$

**SOLUZIONE:** La media non è nota quindi la stimiamo con la media campionaria:  $\bar{x} = 3.02$ . Calcoliamo inoltre  $S^2 = 1.087$ . Nel nostro caso abbiamo che  $H_0 : \sigma^2 \geq 2$ ,  $H_1 : \sigma^2 < 2$ , quindi  $\sigma_0 = 2$ .

La statistica test calcolata sul campione estratto è

$$\frac{(n - 1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{4 * 1.087}{2} = 2.174$$

questo valore va confrontato con il quantile della distribuzione chi-quadrato con 4 gradi di libertà che lascia alla sua destra un'area pari ad  $\alpha = 0.05$ . Tale quantile è pari a 9.5.

la regione di rifiuto è del tipo: rifiuto l'ipotesi nulla per tutti quei campioni tali per cui la statistica test calcolata sul campione è minore del quantile di interesse.

Nel nostro caso abbiamo estratto un campione per il quale la statistica test vale 2.174 quindi questo campione cade nella regione di rifiuto dell'ipotesi nulla.

Se le ipotesi fossero state invece  $H_0 : \sigma^2 \geq 0.3$  contro l'alternativa  $H_1 : \sigma^2 < 0.3$  la statistica test sarebbe diventata

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{4 * 1.087}{0.3} = 14.5$$

quindi in questo caso il campione cade nella regione di accettazione.

## Verifica di ipotesi su due varianze

- $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ,  $\mu_1$  e  $\mu_2$  **non noti**,

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

- Si utilizza la statistica test

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1) \quad \text{sotto } H_0.$$

- **Se**  $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ , si rifiuta se:

$$\gamma = P(S_1^2/S_2^2 \geq s_1^2/s_2^2 | \sigma_1^2 = \sigma_2^2) \leq \alpha$$

zona di rifiuto:

$$R = \{x, y : s_1^2/s_2^2 \geq f_\alpha\} \text{ dove } P(F \geq f_\alpha) = \alpha.$$

- **Se**  $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ , si rifiuta se:

$$\gamma = P(S_1^2/S_2^2 \leq s_1^2/s_2^2 | \sigma_1^2 = \sigma_2^2) \leq \alpha$$

zona di rifiuto:  $R = \{x, y : s_1^2/s_2^2 \leq f_{(1-\alpha)}\}$

- **Se**  $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ , zona di rifiuto:

$$R = \{x, y : s_1^2/s_2^2 \geq f_{\alpha/2} \text{ o } s_1^2/s_2^2 \leq f_{1-\alpha/2}\}.$$

**ESERCIZIO:** Mi vengono proposti due strumenti di misura da utilizzare nel mio processo produttivo. Tali strumenti sono dati in prova per una settimana. In questo periodo effettuo delle misurazioni con tali strumenti ed ottengo i seguenti valori:

$$x = (3, 4.5, 2.2, 1.9, 3.5)$$

$$y = (2.5, 2.2, 1, 4.5, 3.3)$$

Al fine dell'acquisto di uno dei due strumenti voglio valutare se la varianza (precisione) del primo strumento ( $X$ ) è minore della varianza del secondo (ipotesi di lavoro).

Fissiamo una probabilità di commettere un errore di prima specie pari a 0.01.

**SOLUZIONE:** Abbiamo che  $\bar{x} = 3.02$ ,  $\bar{y} = 2.7$ .

Calcoliamo inoltre  $S_X^2 = 1.087$ ,  $S_Y^2 = 1.695$ .

La statistica test è

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} = 0.6412979$$

Il quantile della distribution F di Fisher,  $F(n_1 - 1, n_2 - 1) = F(4, 4)$  che lascia alla sua destra un'area pari a 0.01 è 15.98

Il comando in R per ottenere tale quantile è  $qf(0.99,4,4)$

La regione di rifiuto è del tipo: rifiuto per tutti quei campioni tali per cui la statistica test è maggiore di 15.98:

$$R = \{x, y : s_1^2/s_2^2 \geq 15.98\}$$

Nel nostro caso abbiamo estratto un campione per il quale la statistica test è pari a 1.695 quindi il nostro campione cade nella regione di accettazione dell'ipotesi nulla.

Il p-value è dato da:  $\gamma = 0.6785196 = pf(1.6413, 4, 4)$

In effetti il p-value è molto alto (molto più alto di  $\alpha$ ) quindi sono molto confidente nell'accettare l'ipotesi nulla. In particolare se anche avessi posto  $\alpha = 0.1$  avrei continuato ad accettare l'ipotesi nulla.