Statistica Inferenziale

Antonietta Mira

Primo Ciclo, II anno, 2006

Facoltà di Economia

Università dell'Insubria

SITO:
http://eco.uninsubria.it/Webdocenti/amira/indice.html

E-MAIL:
amira@eco.uninsubria.it

Assistente:
Giovanni Fonseca
gfonseca@eco.uninsubria.it

Esercitatori:
Paolo Tenconi
ptenconi@eco.uninsubria.it

Tutor:
Massimiliano Talento
Massimiliano.Talento@b-source.ch

Incalliti giocatori osservano che la somma 10 compare più spesso della somma 9 ma non si spiegano il motivo, avendo verificato che

il numero di triplette la cui somma è 10:

1, 3, 6
1, 4, 5
2, 2, 6
2, 3, 5
2, 4, 4
3, 3, 4

è uguale al numero di triplette la cui somma è 9:

1, 2, 6
1, 3, 5
1, 4, 4
2, 2, 5
2, 3, 4
3, 3, 3

Come spiegò **Galileo**, i giocatori avevano contato male i casi "favorevoli" per valutare la probabilità dei due eventi di interesse ("somma 10" e "somma 9") dimenticandosi del fatto che la giocata

1, 2, 6

è diversa (per la **posizione** dei dadi) dalle giocate

1, 6, 2
2, 1, 6
6, 1, 2
2, 6, 1
6, 2, 1

e ha quindi un peso pari a 6 nel conteggio dei casi favorevoli, mentre la tripletta

3, 3, 3

ha effettivamente peso 1

Risulta quindi che:
il numero di triplette la cui somma è 10:

1,	3,	6	contata 6 volte
1,	4,	5	contata 6 volte
2,	2,	6	contata 3 volte
2,	3,	5	contata 6 volte
2,	4,	4	contata 3 volte
3,	3,	4	contata 3 volte

è pari a 27 e quindi, effettivamente, è maggiore del numero di triplette la cui somma è 9:

1,	2,	6	contata 6 volte
1,	3,	5	contata 6 volte
1,	4,	4	contata 3 volte
2,	2,	5	contata 3 volte
2,	3,	4	contata 6 volte
3,	3,	3	contata 1 volte

che è pari solo a 25
Ottenere somma 10 è più probabile di ottenere somma 9 nel gioco dei 3 dadi

CONCLUSIONE

la simulazione empirica, ottenuta

con ripetute giocate, ha fornito

la risposta esatta ad una domanda

complicata (per quel tempo)

a cui il ragionamento teorico aveva

fornito risposta errata

(Cardano, *De Ludo Aleae*, 1525)

Gioco dei 3 dadi o gioco della Zara:

scommessa sulla somma di 3 dadi

Quando si parte il giuoco della zara
Colui che perde si riman dolente,
Ripetendo le volte tristo impara
Con l'altro se ne va tutta la gente;
....

Dante, Purgatorio Canto VI
Casanova ('700) ne parla nelle sue memorie

Vista l'importanza ... cominciamo con l'imparare a "contare"!

TESTO:
Cichitelli: Probabilità e Statistica. Cap. 1 e 2.

1.1 Esempio. Ho cinque carte numerate da 1 a 5. Le mischio e le giro a faccia in su. In quanti modi diversi possono risultare ordinate? Quale è la probabilità che le ritrovi nell'ordine crescente da 1 a 5?

Risposta: Ho $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ modi diversi di ordinarle. Fra questi uno solo è quello in cui le carte compaiono in ordine crescente. Quindi se dovessi pagare 1 Euro per giocare ad un gioco in cui vinco se le carte, dopo averle mescolate, le ritrovo ordinate dalla più piccola alla più grande, sarebbe equo che vincessi 120 Euro.

1.2 Regola 1 delle Permutazioni. Il numero di modi in cui posso ordinare n oggetti è

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

Questo è il **numero di permutazioni di n oggetti**.

1.3 Esempio. In una gara con 10 cavalli scommetto che il cavallo A arrivi primo ed il cavallo B arrivi secondo. Quale è la probabilità di vincere la scommessa assumendo che i cavalli abbiano tutti la stessa probabilità di arrivare primi o secondi?

Risposta: notiamo innanzitutto che mi interessa solo chi arriva primo e secondo. Il numero di modi per scegliere il primo ed il secondo cavallo su 10 è $10 \cdot 9 = 90$. La probabilità quindi che la mia scelta sia quella vincente è di 1 su 90. Quindi se pago 1 Euro per scommettere mi aspetto di riceverne 90 Euro nel caso di vittoria altrimenti il gioco non sarebbe equo.

1.4 Regola 2 delle Permutazioni. Il numero di modi per scegliere e ordinare m oggetti da un gruppo di n oggetti è

$$P_{n,m} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1)}_{m} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Questo è noto come il **numero di permutazioni di n oggetti preso m alla volta**

1.5 Esempio. Ho un mazzo di 10 carte con 2 assi. Prendo a caso 2 carte. Quale è la probabilità che siano entrambi assi.

Risposta: il numero di modi possibili che ho per scegliere 2 carte da un mazzo di 10 è $10 \times 9/2 = 45$. Nota che dividiamo per 2 perchè ogni coppia di carte può essere ordinata in modo diverso. Poi procediamo come nell'esempio 1.3

1.6 Regola delle Combinazioni. Il numero di modi per scegliere m oggetti (indipendentemente dall'ordinamento) da un insieme di n è

$$C_{n,m} = \binom{n}{m} =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!\ m!}$$

Questo è noto come il **numero di combinazioni di n oggetti presi m alla volta**

1.7 Osservaziones. Per convenzione abbiamo che $0! = 1$. Notiamo che

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n$$

$$\left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array} \right) = \frac{n(n-1)}{2} \quad \ldots \quad \left(\begin{array}{c} n \\ n-1 \end{array} \right) = n \quad \left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array} \right) = 1$$

Notiamo inoltre questa simmetria:

$$\left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n \\ n-m \end{array} \right) \tag{1}$$

Questo numero non è altro che il numero di modi possibili di partizionare un insieme di n oggetti in due gruppi, uno di m elementi e l'altro di $n-m$ elementi.

1.9 Coefficienti Binomiali. I numeri $\left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right)$ sono detti *coefficienti Binomiali* e li ritroviamo nella famosa formula della di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right) a^{n-m} b^m$$

Notiamo che un caso particolare della formula di Newton's quando $a = b = 1$ ci dice che:

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} = 2^n \qquad (2)$$

1.10 Osservazione. Notiamo inoltre che se $a = 1$ e $b = -1$ abbiamo che:

$$\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} = 0$$

1.11 Triangolo di Pascal.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

La riga n-esima row contiene i numeri $\binom{n}{m}$ per $0 \leq m \leq n$. Ogni numero è la somma dei due che gli stanno sopra

1.12 Lancio di una moneta. Lancio una moneta 100 volte. Quale è la probabilità di osservare esattamente 50 teste e 50 croci?

Soluzione: Il risultato di 100 lanci di una moneta si può registrare come una sequenza di H e T per esempio: HTTHHTHHH...T, di lunghezza 100. Quante sequenze abbiamo di questo tipo? Ce ne sono 2^{100} poichè ogni lettera può essere o H o T (due possibilità). Ora ci chiediamo: quante di queste sequenza contengono esattamente 50 H e 50 T? Posso pensare di scegliere a caso 50 fra le 100 posizioni e di metterci una H e riempire le rimanenti con T quindi ho $C_{100,50}$ modi diversi per fare questo. In conclusione la probabilità di osservare esattamente 50 testa è

$$C_{100,50}/2^{100}$$

Più in generale se lancio una moneta n volte la probabilità di osservare m volte testa è

$$C_{n,m}/2^n \tag{3}$$

1.14 Esempio. Una piccola impresa ha 10 impiegati uomini e 10 donne. Per uno speciale progetto l'amministratore delegato vuole una squadra di 3 impiegati scelti a caso. Quale è la probabilità che la squadra sia di tutte donne?

Soluzione: posso pensare che ogni membro della squadra può essere donna con probabilità pari ad 1/2. Quindi la probabilità che siano tutte donne è $(1/2)^3 = 1/8$. Giusto? No, sbagliato! Ci sono esattamente $C_{20,3}$ modi diversi di scegliere 3 impiegati da un gruppo di 20 e di sono $C_{10,3}$ modi diversi di segliere 3 donne da un gruppo di 10 disponibili quindi la probabilità che la squadra sia tutta femminile è

$$\frac{C_{10,3}}{C_{20,3}} = \frac{2}{19}$$

questo è più o meno 1/8 ma un pò più piccolo.

1.15 Esempio. Lancio due dadi. Quale è la probabilità che la somma sia 9?

Solution: Ci sono $6 \times 6 = 36$ possibili coppie di valori:

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						x
4					x	
5				x		
6			x			

Solo 4 di queste coppie danno somma 9 quindi la probabilità è di $4/36=1/9$.

Si distingue fra:

Esperimento deterministico:
risultato prevedibile

Esperimento aleatorio:
risultato non prevedibile

Noi ci occuperemo di esperimenti aleatori e in questo ambito definiamo:

Evento elementare: singolo risultato di un esperimento aleatorio

Spazio campionario $= \Omega =$ insieme dei possibili eventi elementari, cioè l'insieme dei possibili risultati dell'esperimento

ESEMPIO: lancio una moneta

$$\Omega = \{T, C\}$$

ESEMPIO: lancio due monete

$$\Omega = \{TT, CC, TC, CT\}$$

ESEMPIO: lancio due dadi

$$\Omega = \{(1,1),\ (1,2),\ \cdots, (6,6)\}$$

ESEMPIO: durata lampadina fino a rottura

$$\Omega = \{x : x \geq 0\}$$

Spazio campionario DISCRETO: costituito da un numero finito o da una *infinità numerabile* di elementi

ESEMPIO: lancio una moneta fino a quando non esce la prima testa.

$$\Omega = \{T, CT, CCT, CCCT, CCCCT, \cdots\}$$

in questo caso l'insieme Ω è costituito da un'infinità numerabile di eventi elementari

Spazio campionario CONTINUO: costituito da una infinità non numerabile di elementi (idealizzazione matematica di situazioni reali)

Evento: un qualsiasi insieme di *eventi elementari*, ossia un qualiasi sottoinsieme di Ω

ESEMPIO: lancio due monete e considero l'evento: "esce su almeno una delle due monete testa". L'evento che considero è composto dai seguenti eventi elementari

$$E = \{(T,T);\ \ (T,C);\ \ (C,T)\}$$

ESEMPIO: lancio due dadi e considero l'evento: "esce uno sul primo dado". L'evento che considero è composto dai seguenti eventi elementari

$$E = \{(1,1);\ \ (1,2);\ \ (1,3);\ \ (1,4);\ \ (1,5);\ \ (1,6)\}$$

OPERAZIONI SU INSIEMI

Complementare: A^c o $\bar{A}$ è l'insieme dei punti di Ω che non appartengono ad A

Unione di due eventi A e B, $A \cup B$ è l'insieme costituito da tutti i punti di Ω che appartengono ad A o a B oppure ad entrambi (parola chiave **O**)

Si ha $A \cup A^c = \Omega$

Intersezione di due eventi A e B, $A \cap B$ è l'insieme costituito da tutti i punti di Ω che appartengono ad A e a B (parola chiave **E**)

Sottoinsieme: dati due eventi A e B si dice che A implica B e si scrive $A \subset B$ se il verificarsi di A implica il verificarsi di B

Due insiemi si dicono **incompatibili** o **disgiunti** se non hanno punti in comune, cioè se il verificarsi di uno dei due esclude il verificarsi dell'altro. In questo caso $A \cap B = \emptyset$

PROPRIETA'

Propretà di idempotenza:

$A \cup A = A$

e

$A \cap A = A$

Proprietà commutativa:

$A \cup B = B \cup A$

e

$A \cap B = B \cap A$

Proprietà associativa:

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Proprietà distributiva:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Inoltre

$$A \cup \emptyset = A$$
$$A \cup \Omega = \Omega$$
$$A \cap \Omega = A$$
$$A \cup A^c = \Omega$$
$$A \cap A^c = \emptyset$$

Leggi di De Morgan:

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$
$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

PROBABILITA'

Insieme delle parti di Ω = famiglia dei possibili sottoinsiemi di Ω. Verrà indicato con: $\mathcal{A}$. Questa è una famiglia tale che:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$

2. se $A \in \mathcal{A}$ allora anche $A^c \in \mathcal{A}$

3. se $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ allora anche $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$

ESEMPIO: lancio un dado
$\Omega = \{T, C\}$
$\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, T, C\}$

ESEMPIO: estraggo una pallina da urna con 3 palline numerate
$\Omega = \{1, 2, 3\}$
$\mathcal{A} = \{\emptyset; \Omega; 1; 2; 3; (1, 2); (1, 3); (2, 3)\}$

Si dice **funzione di probabilità** una funzione che ha $\mathcal{A}$ come dominio e tale che:

1. $P(\Omega) = 1$

2. $P(A) \geq 0, \qquad \forall A \in \mathcal{A}$

3. $P(A_1 \cup A_2, \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$ per ogni successione di eventi in $\mathcal{A}$ a due a due incompatibili

Diverse interpretazioni della probabilità

- definizione **classica**: rapporto fra casi favorevoli e casi possibili

- definizione **frequentista**: limite della frequenza relativa in una serie di prove ripetute sotto condizioni simili

- definizione **soggettivista** o Bayesiana: valutazione del soggetto sul grado di avverabilità di un evento

- definizione **assiomatica**: quella da noi adottata

Ulteriori proprietà della misura di probabilità

a partire dai 3 assioni si può dimostrare che:

- $P(A^c) = 1 - P(A), \qquad \forall A \in \Omega$

- $P(\emptyset) = 0$

- $0 \leq P(A) \leq 1, \qquad \forall A \in \Omega$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  $\forall A, B \in \Omega$

CALCOLO delle PROBABILITA'

cioè assegnazione di probabilità ad eventi

Supponiamo che Ω sia composto da N eventi elementari equiprobabili cioè t.c.

$$P(\omega_i) = p_i = 1/N, \qquad \forall \omega_i \in \Omega$$

Se A è un evento composto da eventi elementari $\omega_i \in A$ equiprobabili allora

$$P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i = N(A)/N$$

dove $N(A)$ è il numero di eventi elementari contenuti in A

ESEMPIO

Consideriamo l'esperimento del lancio di due dadi.

Quale è la probabilità che esca una somma pari?

Indichiamo con A l'evento "esce somma pari"

Sappiamo che Ω è composto da 36 eventi elementari equiprobabili:

$$\Omega = \{(1,1);\ (1,2); \cdots (6,5);\ (6,6)\}$$

di questi eventi elementari 18 stanno in A:

$$A = \{(1,1);\ (1,3);\ (1,5);\ \cdots (6,4);\ (6,6)\}$$

Abbiamo quindi che $N(A) = 18$ e dunque:

$$P(A) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{18}{36} = 0.5$$

Se invece voglio calcolare la probabilità che sul primo dado esca uno (indichiamo con B questo evento) avremo che

$$B = \{(1,1);\ (1,2);\ (1,3);\ (1,4);\ (1,5);\ (1,6)\}$$

$$P(B) = 6/36 = 1/6$$

Se voglio calcolare la probabilità che sul primo dado esca uno **E** che la somma sia pari avremo che

$$P(A \cap B) = 3/36$$

Se voglio calcolare la probabilità che sul primo dado esca uno **O** che la somma sia pari avremo che

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$= 0.5 + 0.166 - 0.083 = 0.583$$

$$P(A \cup B) \geq P(A)$$

$$P(A \cup B) \geq P(B)$$

PROBABILITA' CONDIZIONATA

Supponiamo di sapere ora che sul primo dado è uscito uno.
Come cambia la probabilità che la somma sia pari?

L'informazione aggiuntiva restringe lo spazio degli eventi da Ω a B! Quindi il numero dei casi possibili non è più 36 ma $6 = N(B)$. Di questi 6 eventi 3 sono favorevoli quindi la nostra valutazione di probabilità diventa $3/6 = 0.5$

Generalizzando ...

Dati due eventi A e B con $P(B) > 0$ si definisce probabilità di A condizionata a B (o dato B) e si indica con $P(A|B)$, la probabilità di A subordinatamente al fatto che l'evento B si è verificato e risulta:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Se $P(B) = 0$ abbiamo che anche $P(A|B) = 0$

Nell'esempio sopra dei dadi abbiamo usato la stessa regola:

$$P(A|B) = \frac{3/36}{6/36} = 3/6 = 0.5$$

INDIPENDENZA fra EVENTI

Due eventi A e B sono indipendenti se:

$$P(A|B) = P(A)$$

cioè che la probabilità che si verifichi l'evento A non cambia se B si è verificato o meno. Lo stesso vale per B in quanto l'indipendenza statistica è un concetto simmetrico, cioè

$$P(B|A) = P(B)$$

Una definizione alternativa (ed equivalente) alle due precedenti di indipendenza statistica è :

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

Abbiamo quindi dato 3 definizioni equivalenti di indipendenza statistica fra due eventi

ESEMPIO: lancio due volte un dado regolare. Quale è la probabilità che esca due volte uno?

Sulla base di considerazioni fisiche si può ammettere che i due lanci siano indipendenti. Indichiamo con A_i l'evento esce i al primo lancio e con B_i l'evento esce i al secondo lancio

Dobbiamo quindi calcolare

$$P(A_1 \cap B_1) = P(A_1) * P(B_1) = \frac{1}{6} * \frac{1}{6}$$

ESEMPIO: ho un'urna con 10 palline di cui 3 nere. Estraggo **con reimmissione** due palline. Quale è la probabilità che siano entrambe nere?

La reimmissione rende le due estrazioni indipendenti. Indichiamo con $N1$ l'evento "esce nero alla prima estrazione" e con $N2$ l'evento "esce nero alla seconda estrazione". Abbiamo quindi che.

$$P(\text{prima nera e seconda nera}) =$$

$$= P(N1 \cap N2) = P(N1) * P(N2) =$$

$$= (3/10) * (3/10) = 0.09$$

Nell'esempio di prima cosa cambia se le estrazioni non sono fatte con reimmissione?

Gli eventi non sono più indipendenti! Abbiamo quindi

$$P(N1 \cap N2) = P(N1) * P(N2|N1) =$$

$$= (3/10) * (2/9) = 0.0666$$

Notiamo che la probabilità diminuisce.

Dati 3 eventi A, B, C abbiamo che

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$$

oppure

$$P(A \cap B \cap C) = P(B)P(C|B)P(A|C \cap B)$$

a meno che ci sia indipendenza nel qual caso

$$P(A \cap B \cap C) = P(B)P(C)P(A)$$

ESEMPIO

da una partita di 1000 confezioni di pasta ne estraggo due per controllare se il peso è al di sotto di quello dichiarato. Sapendo che la partita contiene 10 confezioni difettose qual è la probabilità che entrambe le confezioni estratte siano sottopeso?

Indichiamo con A_i l'evento: l'i-esima confezione estratta è difettosa. Abbiamo allora che

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{10}{1000}\,\frac{9}{999}$$

GENERALIZZAZIONE del concetto di INDIPENDENZA

Dati n eventi $A_1, A_2, \cdots A_n$ si dicono **globalmente o mutuamente indipendenti** se, comunque preso un sottoinsieme degli eventi stessi

$$A_{i1} \cap A_{i2} \cdots \cap A_{ik}$$

con $k \leq n$ essi risultano fra loro indipendenti cioè la probabilità congiunta deve essere pari al prodotto delle probabilità marginali:

$$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cdots \cap A_{ik}) = P(A_{i1})P(A_{i2}) \cdots P(A_{ik})$$

ESEMPIO

3 eventi sono mutuamente indipendenti se

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

e

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$$

PARTIZIONE di Ω

Si dice che n eventi, $A_1, A_2, \cdots A_n$ formano una partizione dello spazio campionario Ω se gli eventi sono

- *incompatibili* cioè il verificarsi di uno esclude il verificarsi degli altri

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \qquad \forall i \neq j$$

- ed *esaustivi* cioè l'unione degli eventi mi deve ricostituire Ω:

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$$

TEOREMA di BAYES

Data una partizione di Ω in k eventi (detti CAUSE):

$$\Omega = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k$$

siamo interessati a calcolare la probabilità di un evento $E \in \Omega$ (detto EFFETTO) e supponiamo di conoscere:

$$P(E|C_i) \qquad \forall i$$

cioè la probabilità dell'effetto data ciascuna della cause e sono inoltre note le probabilità di ciascuna causa $P(C_i), \forall i$

Supponiamo ora di verificare che l'effetto si è manifestato e ci chiediamo quale sia la causa che lo ha provocato, siamo cioè interessati a valutare $P(C_i|E)$. Abbiamo allora che

$$P(C_i|E) = \frac{P(C_i \cap E)}{P(E)}$$

NUMERATORE:
poichè $P(E \cap C_i) = P(C_i)P(E|C_i)$

DENOMINATORE:
considerando il fatto che le cause formano una partizine di Ω (una ed una sola della cause ha determianto l'evento) avremo che:

$$P(E) = P(E \cap C_1) + P(E \cap C_2) + \cdots + P(E \cap C_k)$$

quindi, poichè $P(E \cap C_1) = P(C_1)P(E|C_1)$ e così anche per tutte le altre cause, avremo che:

$$P(C_i|E) = \frac{P(C_i)P(E|C_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(C_j)P(E|C_j)}$$

ESEMPIO

Effetto: fallimento azienda $= E$
Cause:
cattiva amministrazione $= C_1$
cattivo processo produttivo $= C_2$

So che:

$$P(C_1) = 0.4$$

$$P(C_2) = 0.6$$

$$P(E|C_1) = 0.3$$

$$P(E|C_2) = 0.4$$

L'impresa fallisce. Quindi l'evento E si è verificato. Voglio sapere quale è la probabilità che la causa sia stata la cattiva amministrazione.

Quindi voglio calcolare:

$$P(C_1|E) = \frac{P(C_1 \cap E)}{P(E)}$$

NUMERATORE:

$$P(C_1 \cap E) = P(C_1)P(E|C_1) = 0.4 * 0.3$$

DENOMINATORE:

$$P(E) = P(C_1)P(E|C_1) + P(C_2)P(E|C_2) =$$

$$= 0.4 * 0.3 + 0.6 * 0.4$$

quindi

$$P(C_1|E) = \frac{0.12}{0.12 + 0.24} = 0.333$$

mentre

$$P(C_2|E) = \frac{0.24}{0.12 + 0.24} = 0.666$$

Variabile aleatoria (o casuale o stocastica):
è una quantità il cui valore è determianto da un esperimento casuale o aleatorio.

Associo un numero ad un evento, per esempio

esperimento: lancio una moneta

possibili risultati elementari:
$\omega_1 = \text{TESTA} \quad \rightarrow \quad 1 = X(\omega_1)$
$\omega_2 = \text{CROCE} \quad \rightarrow \quad 0 = X(\omega_2)$
in questo caso $\Omega = \{\omega_1 = T, \omega_2 = C\}$
ed $X(\omega)$ assume i valori 0 ed 1

DEFINIZIONE di VARIABILE ALEATORIA (VA):
è una funzione che associa un numero reale $X(\omega)$ ad un evento elementare ω di Ω

VA discreta: se lo spazio campionario è discreto quindi X può assumere un numero finito o un'infinità numerabile di valori (in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali)

ES: lancio di un dado - risultato di un'elezione

VA continua: se lo spazio campionario è continuo, se è costituito cioè da un'infinità non numerabile di eventi elementari

ES: tempo di funzionamento di un macchinario prima della rottura

Alla generica variabile aleatoria X si associa:

- funzione di ripartizione:
  $F_X(x) = P(X \leq x)$
  Questa definizione vale sia per VA discrete che continue
  In particolare se la VA è **discreta** la funzione di ripartizione è a gradini. Se invece la VA è **continua** la funzione di ripartizione è continua.

- distribuzione di probabilità :
  $f_X(x) = P(X = x)$ (se X è discreta)

- o funzione di densità :
  $f_X(x) = F'_X(x)$ (se X è continua)

- media: $E(X)$

- varianza: $V(X)$

Nota la $f(X)$ posso ricavare tutto il resto
Nota la $F(x)$ posso ricavare tutto il resto

DISTRIBUZIONI discrete

Sono caratterizzate da:

$f(x) = P(X = x)$

$E(X) = \sum_x x f(x) = \mu_X$

$V(X) = E(X - \mu_X)^2 = \sum_x (x - \mu_X)^2 f(x) = \sigma_X^2$

MODELLI PROBABILISTICI NEL DISCRETO

Distribuzione Uniforme discreta:

i valori assunti sono:

$$X = 1, 2, \cdots, N$$

le frequenze sono:

$$f(x) = 1/N \qquad x = 1, 2, \cdots, N$$

abbiamo che:

$$E(X) = \frac{N+1}{2}$$

$$V(X) = \frac{N^2 - 1}{12}$$

formule ottenute sapendo che

$$\sum_{i=1}^{N} i = \frac{N(N+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{N} i^2 = N(N+1)(2N+1)/6$$

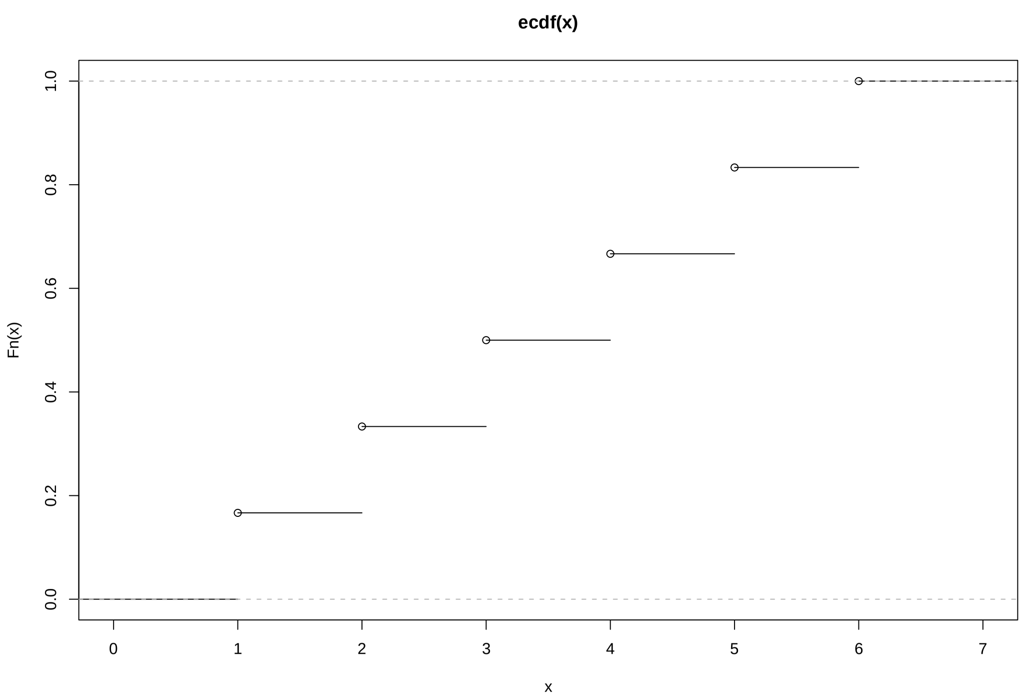
ESEMPIO: lancio un dado regolare, ho sei possibili esiti equiprobabili. L'esperimento del lancio di un dado può essere modellizzato da una variabile casuale con distribuzione uniforme discreta sui valori $X = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Avremo quindi che la funzione di probabilità è :

$$f(x) = 1/6, \qquad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

inoltre

$$E(X) = 7/2 \quad \text{e} \quad V(X) = 35/12$$

In Figura è rappresentata la funzione di ripartizione della VA


ecdf(x)
Fn(x)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
1
2
3
4
5
6
7
x

Distribuzione Bernoulliana: questa distribuzione viene usata se l'esperimento aleatorio può assumere solo due possibili risultati (vero/falso, si/no, bianco/nero, favorevole/contrario).

Per esempio, se faccio un'indagine elettorale e chiedo agli intervistati se hanno votato per il partito del pensionati la risposta è di tipo SI/NO.

Associo alla risposta
SI il valore 1
ed alla risposta
NO il valore 0

(questa riclassificazione è del tutto arbitraria e avrei potuto fare anche il contrario)

Ogni singola intervista rappresenta un esperimento di tipo bernoulliano.

X assume solo i valori 0 ed 1

$$P(X = 1) = p$$

$$P(X = 0) = 1 - p$$

$$f(x) = p^x(1 - p)^{(1-x)}$$

$$E(X) = 1 * p + 0 * (1 - p) = p$$

$$E(X^2) = 1^2 p + 0^2(1 - p) = p$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

Distribuzione Binomiale: si ottiene una distribuzione binomiale quando ripeto n volte un esperimento di tipo bernoulliano avendo cura che le ripetizioni siano fra loro indipendenti ed avvengano nelle stesse condizioni (identicamente distribuite).

Nell'esempio precedente, se l'esperimento consiste nell'intervistare n elettori e mi assicuro che le risposte degli uni non influenzino le risposte degli altri allora possiamo descrivere l'esperimento con una distribuzione binomiale.

Indichiamo con X gli n esperimenti Bernoulliani sottostanti. Supponiamo che siano fra di loro *indipendenti* ed *identicamente distribuiti*:

$$X_i \sim Ber(p) \qquad i = 1, \cdots, n$$

Indichiamo con

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

avremo allora che Y ha una distribuzione Binomiale di parametri n e p e indichiamo questo così :

$$Y \sim Bin(n,p)$$

avremo che Y assume valori $0, 1, \cdots, n$ e la funzione di probabilità di Y è

$$f(Y=y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{(n-y)} \qquad y = 0, 1, \cdots, n$$

dove

$$\binom{n}{y} = \frac{n!}{y!(n-y)!}$$

$$E(Y) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$$

$$V(Y) = V(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = np(1-p)$$

ESEMPIO: una scatola contiene 5 palline di cui 3 bianche e 2 nere. Estraggo a caso 3 palline (con reimmissione). Quale è la probabilità di pescarne 3 bianche? E 3 nere? E 2 bianche e una nera?

Indichiamo con X_i la variabile casuale associata alla i-esima estrazione.
Associamo il valore 1 al risultato "esce una pallina bianca".
Abbiamo che le X_i sono indipendenti (grazie alla reimmissione) ed identicamente distribuite come una Bernoulliana:

$$X_i \sim Ber(p = 3/5)$$

Per risposndere alla prima domanda dobbiamo calcolare $P(Y = 3)$ dove

$$Y = \sum_{i=1}^{3} X_i = X_1 + X_2 + X_3$$

quindi

$$Y \sim Ber(n = 3, p = 3/5)$$

Abbiamo che

$$P(Y = 3) = P(\text{3 bianche}) =$$

$$= P(\text{prima B e seconda B e terza B}) =$$

$$= P(\text{prima B})P(\text{seconda B})P(\text{terza B}) =$$

$$= 3/5 * 3/5 * 3/5 = (3/5)^3 = p^y$$

inoltre

$$P(Y = 0) = P(\text{3 nere}) =$$

$$= P(\text{prima N e seconda N e terza N}) =$$

$$= P(\text{prima N})P(\text{seconda N})P(\text{terza N}) =$$

$$= 2/5 * 2/5 * 2/5 = (1 - p)^{n-y}$$

infine

$$P(Y = 2) = P(\text{2 bianche e 1 nera}) =$$

$$= \binom{3}{2}(3/5)^2 * (2/5)^1 = \binom{n}{y}p^y(1 - p)^{(n-y)}$$

dove il coeff. binomiale $\binom{3}{2} = 3$ sta ad indicare che ci sono 3 combinazioni diverse per avere 2 palline bianche ed una nera cioè BBN oppure BNB oppure NBB

Anche per il calcolo di $P(Y = 3)$ e $P(Y = 0)$ devo usare il coeff. binomiale ma esso risulta pari ad uno perchè ho un unico modo per estrarre 3 palline bianche (o 3 palline nere) in 3 estrazioni

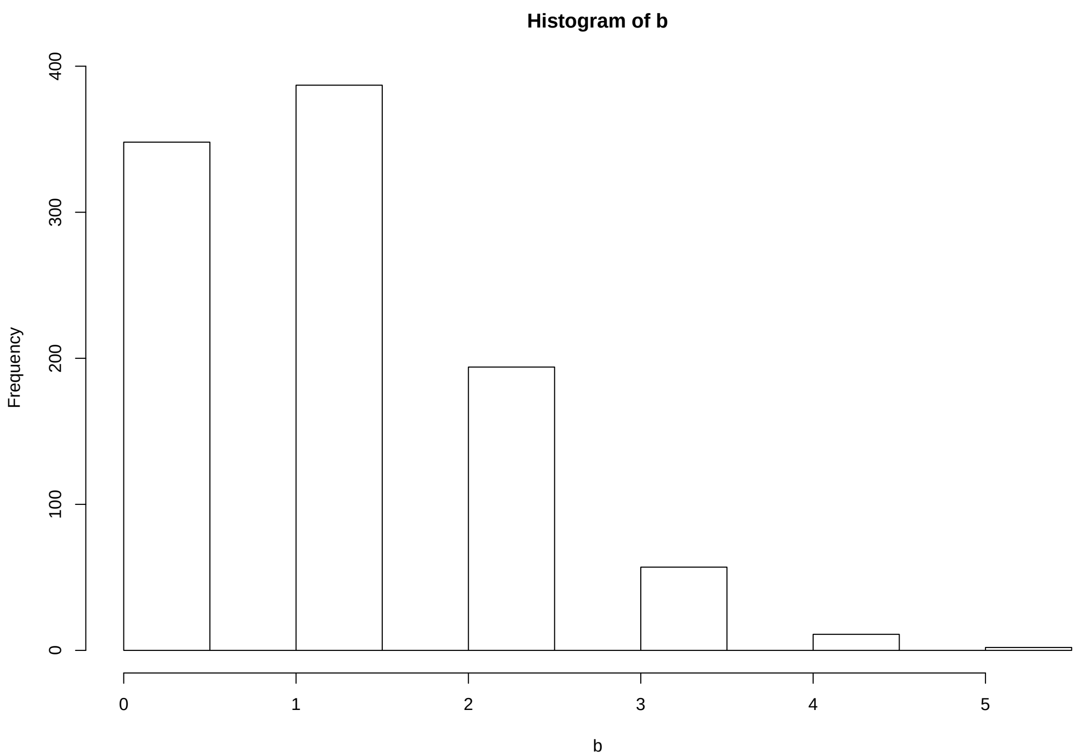
ESEMPIO: un macchinario produce pezzi difettosi con probabilità pari a 0.1. Quale è la probabilità che su 10 pezzi prodotti, pescati da uno scatolone contenente la produzione giornaliera, ce ne sia uno (due, tre, ... dieci) difettoso?

Indicando con Y il numero di pezzi difettosi e supponendo che una volta esaminato un tondino lo rimetto nello scatolone, avremo che

$$Y \sim Bin(n, p)$$

con $n = 10$ e $p = 0.1$ possiamo quindi costruire questa tabella in cui compare la $P(Y = 1)$ sulla prima riga, $P(Y = 2)$ sulla seconda riga etc.

y	$f(y)$
0	0.348
1	0.387
2	0.194
3	0.057
4	0.011
5	0.001
6	0
7	0
8	0
9	0
10	0


Histogram of b
Frequency
0
100
200
300
400
0
1
2
3
4
5
b

Distribuzione Poissoniana: si tratta di una distribuzione usata per caratteri **DISCRETI NON NEGATIVI** cioè i valori assunti sono $X = 0, 1, 2, 3, \cdots$. Si usa per contare il numero di eventi che avvengono in un certo intervallo di tempo o di spazio (pesci che abboccano all'amo in una giornata, telefonate che arrivano al centralino in un'ora, incidenti alla settimana, numero di auto che si presentano ad un parcheggio ...)

La distribuzione è indicizzata ad un parametro, λ che rappresenta la media della distribuzione ed è sempre $\lambda > 0$.

$$f(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, \cdots$$

$$E(X) = \lambda$$

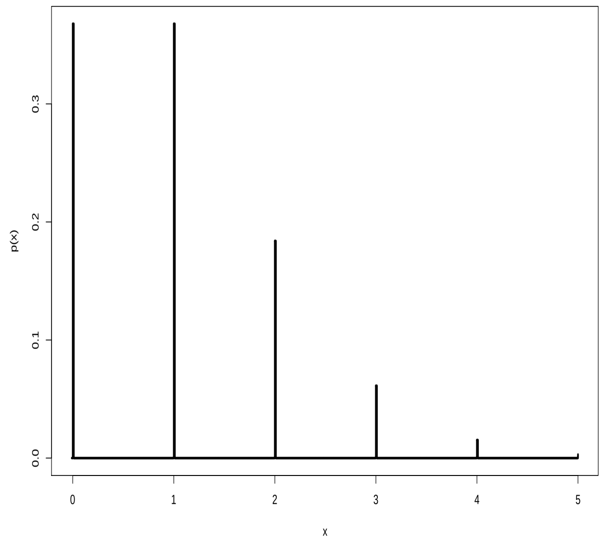
$$V(X) = \lambda$$

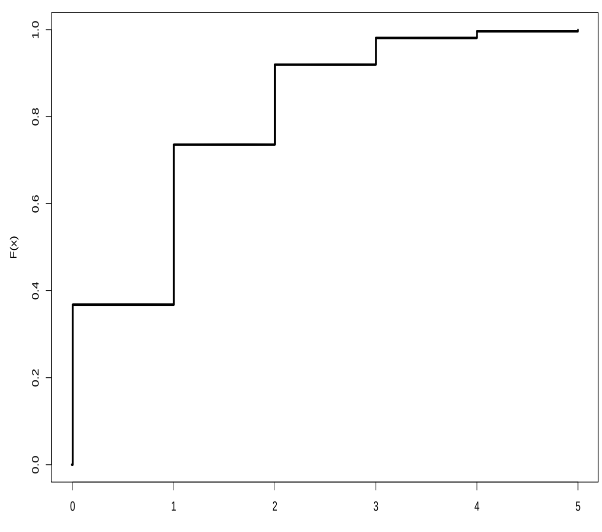
In Fugura 1 è riporatato il diagramma delle frequenze relative

In Figura 2 è riportata la funzione di ripartizione per una distribuzione di Poisson con media $= 1$.

Poichè il supporto della distribuzione sono tutti gli interi non negativi abbiamo troncato nei grafici l'asse delle ascisse al valore 5.

Si noti però che la frequenza relativa con cui si osservano 5 eventi è già molto bassa e come i gradini della funzione di ripartizione sono sempre più piccoli.


p(x)
0.0
0.1
0.2
0.3
0
1
2
3
4
5
x


F(x)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
1
2
3
4
5
x

Esempio

Il numero di telefonate che arrivano in media in un'ora ad un centralino è pari a 4. Calcolare la deviazione standard ed il momento secondo della distribuzione delle telefonate.

Abbiamo che:

$$X \sim Pois(\lambda = 4)$$

quindi

$$V(X) = \lambda = 4$$

$$\sqrt{V(X)} = 2 = \text{Dev. Std.}$$

Inoltre, poichè $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ abbiamo che il momento secondo vale:

$$E(X^2) = \lambda + \lambda^2 = 4 + 16 = 20$$

Legame fra Binomiale e Poisson

se n è grande e p è piccolo la distribuzione Binomiale può essere ben approssimata con una Poisson dove $\lambda = np$

Si ha una buona approssimazione quando

$$n/p > 500$$

Esempio:

$$X \sim Bin(n = 15, p = 0.1)$$

$$Y \sim P(\lambda = 15 * 0.1 = 1.5)$$

num. successi	X	Y
0	0.206	0.223
1	0.343	0.335
2	0.267	0.251
3	0.128	0.125
4	0.043	0.047
5	?	?
6	?	?
7	?	?
8	0	0
9	0	0
10	0	0
.	.	.

completate voi la tabella! e fatene una con $n = 50, p = 0.1$ e con $n = 5, p = 0.01$

MODELLI PROBABILISTICI nel CONTINUO

cioè quando lo spazio campionario è costituito da una infinità non numerabile di eventi (esempio: durata di una lampadina).

E' sempre legata ad una operazione fisica di misurazione di grandezze
(peso, durata, tempo, lunghezza ...)

ESEMPIO: misuro l'altezza di tutti gli studenti dell'Università dell'Insubria. Riclassifico in classi. Ottengo un istogramma.

classe	amp. $= \delta_i$	f. rel. $= f_i$	densità f. $= h_i$
$(154 - 159]$	5	0.01	0.002
$(159 - 164]$	5	0.05	0.01
...	...	...	...

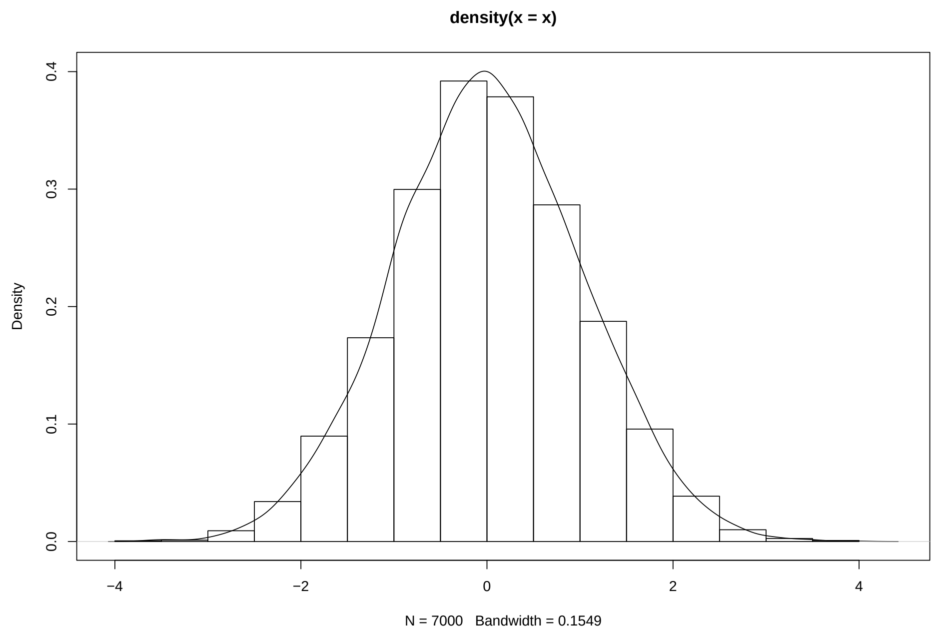
L'istogramma associa a ciascun punto interno ad una classe una densità di frequenza o densità di probabilità $h_i = f_i/\delta_i$ che esprime la probabilità riferibile ad un intervallino di ampiezza unitaria

La probabilità corrispondente ad un intervallino di ampiezza δ^* tutto contenuto in una classe si ottiene moltiplicando δ^* per la densità di probabilità relativa alla classe in cui l'intervallo è compreso

In questo schema la **probabilità** è rappresentata da un'**area** e quindi la probabilità per un punto (intervallo di ampiezza nulla) è zero

Inoltre la **somma delle aree** dei rettangoli è pari ad **uno** perchè è la somma delle frequenze relative delle varie classi

"Lisciamo" ora l'istogramma con una funzione:



Questa funzione è tale che:

- $f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
- $\int_a^b f(x)dx = P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b)$

Una funzione con questa proprietà è detta **funzione di densità**

Inoltre risulta che

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = P(X \leq x)$$

$$\text{ovvero} \quad F'(x) = f(x)$$

ed F, la funzione di ripartizione, è una funzione

- non descrescente
- continua
- $F(b) - F(a) = P(a \leq X \leq b)$
- $lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- $lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Media e varianza

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx$$

vale sempre la regola

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

dove

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$$

Distribuzione Uniforme continua:

X assume valori sull'intervallo $[a, b]$:

$$a \leq X \leq b$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad a \leq x \leq b$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

ESERCIZIO: Sia $X \sim U(-1, 2)$. Determinate la mediana ed il quantile di ordine 0.9.

SOLUZIONE: la funz. di ripartizione di X è

$$F_X(x) = \frac{x+1}{3}$$

quindi la mediana si trova risolvendo rispetto ad x l'equazione

$$F_X(x) = 0.5$$

$$\frac{x+1}{3} = 0.5$$

$$x = 0.5 * 3 - 1$$

quindi $Md_X = 0.5$ mentre il quantile di ordine 0.9 si trova risolvendo rispetto ad x l'equazione

$$F_X(x) = 0.9$$

quindi $Q_X(0.9) = 1.7$

Un n.a. X ha distribuzione uniforme continua sull'intervallo $(-2, 2)$. Scrivete l'espressione della funzione di densità e la funzione di ripartizione di X. Disegnatele, e indicate nei due grafici la $P(X \leq 1)$. Infine, calcolate $P(X > 1)$.

Ricordiamo che la densità uniforme su un intervallo (a, b) è data da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a, b) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

La funzione di ripartizione è

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Il valore atteso e la varianza di X sono pari a:

$$E(X) = \frac{a+b}{2},$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

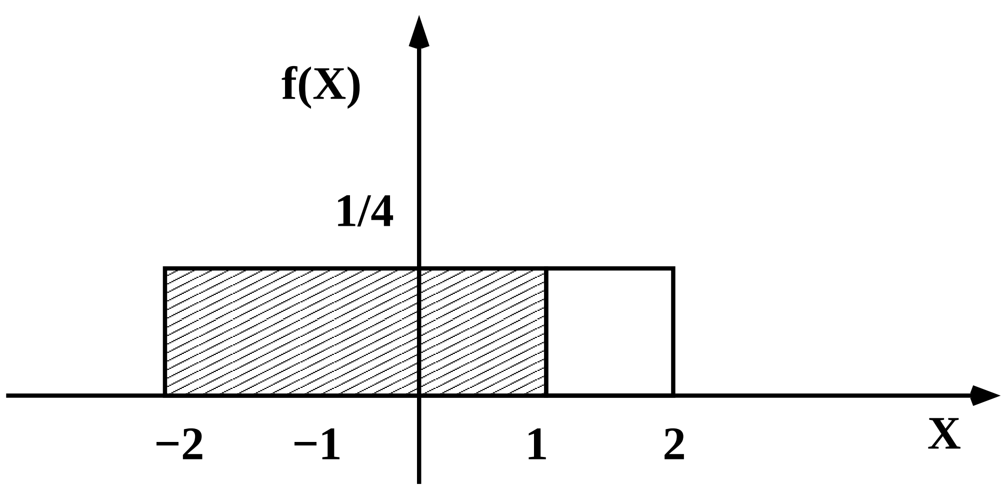
Nel nostro caso, $a = -2$, $b = 2$, quindi

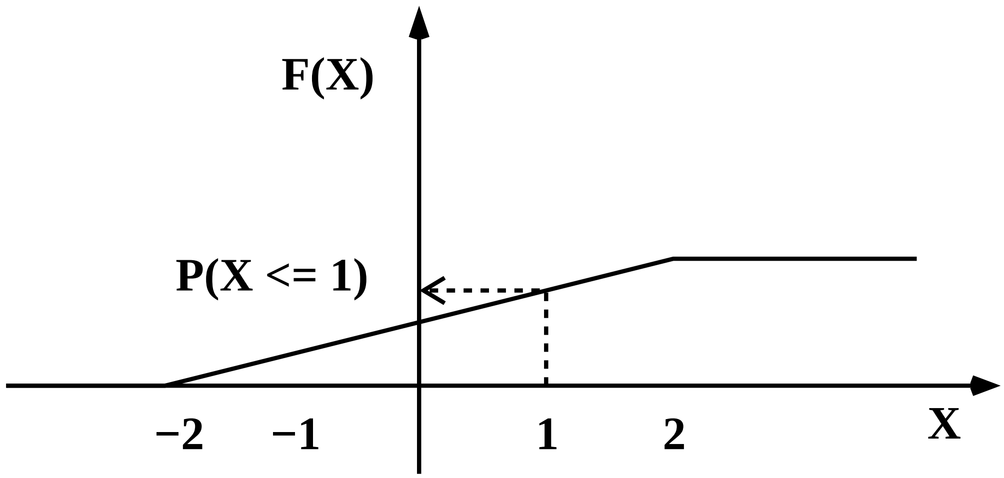
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & x \in (-2, 2) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e la funzione di ripartizione è

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ \frac{x+2}{4} & -2 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

In Figura l'area tratteggiata rappresenta la $P(X \leq 1)$ sul grafico della funzione di densità. In Figura è invece indicata la $P(X \leq 1)$ sul grafico della funzione di ripartizione.





Usando la funzione di ripartizione:

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

oppure, dalla densità

$$P(X > 1) = \int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^2 \frac{1}{4}dx = \frac{1}{4}$$

Distribuzione Esponenziale:
(detta anche esponenziale negativa)
si tratta di una distribuzione per caratteri **CONTINUI NON NEGATIVI** cioè i valori assunti sono $X \geq 0$ come si evince dal grafico riportato in figura dove è rappresentata la funzione di densità.

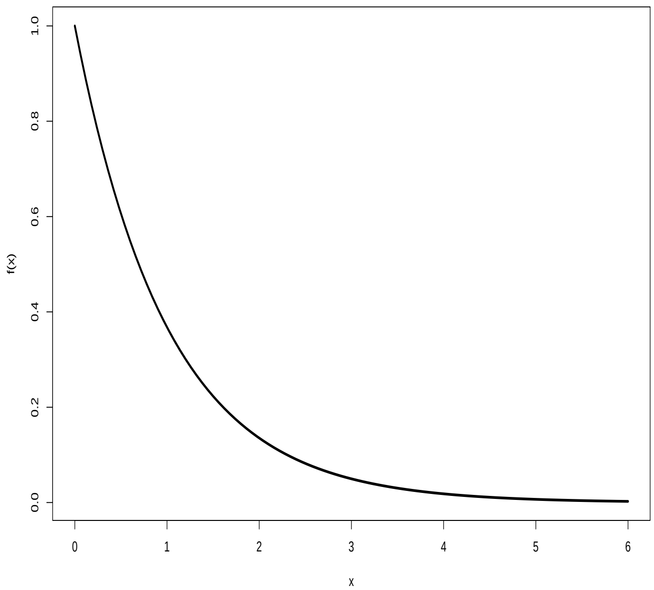
Si può usare per descrivere il carattere: tempo di attesa fra due eventi.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad x > 0$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$E(X) = 1/\lambda$$

$$V(X) = 1/\lambda^2$$



ESEMPIO:
Vogliamo studiare il tempo di attesa ad uno sportello bancario. So che in media aspetto 4 minuti fra un cliente ed il successivo.

Il modello adatto per descrivere questo fenomeno è l'esponenziale con parametro $\lambda = 1/4 = 0.25$.

Quanto vale la deviazione standard oraria del tempo di attesa?

Abbiamo che $V(X) = 1/\lambda^2 = 16$ quindi

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{16} = 4$$

Questo vale in generale cioè per una distribuzione esponenziale abbiamo che:

$$\sigma_X = \mu_X = 1/\lambda$$

Supponiamo che la durata in ore di un macchinario sia descritta da un n.a. X con distribuzione esponenziale negativa di parametro $\lambda = 0,001$.

1. Quale è la durata attesa del macchinario?

2. Calcolate la probabilità che la durata sia superiore a 200 ore

3. Calcolate la probabilità che il macchinario funzioni per altre 200 ore, nell'ipotesi che sia ancora in funzione dopo 800 ore

Il n.a. X ha densità :

$$f(x) = 0,001 e^{-0,001x}, \qquad x > 0$$

e funzione di ripartizione

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-0,001x} & x > 0 \end{cases}$$

Abbiamo quindi che:

1. La durata attesa è $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 1000$ ore

2. $P(X > 200) = 1 - P(X \leq 200) = 1 - F(200) = e^{-0{,}001 \times 200} = 0{,}8187$ Si noti che, in generale:

$$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$$

3.

$$P(X > 1000|X > 800) =$$

$$\frac{P((X > 1000) \cap (X > 800))}{P(X > 800)} =$$

$$= \frac{P(X > 1000)}{P(X > 800)} = \frac{e^{-0{,}001 \times 1000}}{e^{-0{,}001 \times 800}} =$$

$$e^{-0{,}001(1000-800)} = 0{,}8187$$

Notiamo che:

$$P(X > 1000 | X > 800) = P(X > 200)$$

e, in generale:

$$P(X > k + z | X > k) = P(X > z).$$

Questa proprietà della distribuzione esponenziale è detta "*assenza di memoria*"

Distribuzione Normale: si tratta di una distribuzione usata per caratteri **CONTINUI** cioè i valori assunti sono tutti i numeri reali.

Si può usare per rappresentare la distribuzione degli errori di misurazione in quanto errori grandi risultano meno probabili di errori piccoli (quindi la parte centrale della distribuzione è più alta delle code).

Inoltre errori positivi (sovrastima) e negativi (sottostima) risultano ugualmente frequenti quindi la distribuzione è simmetrica come si evince dal grafico riportato in figura.

Proprio in quest'ambito è stata introdotta la distribuzione Normale da Gauss all'inizio dell'800 (da qui il nome di *distribuzione Gaussiana*).

L'importanza della distribuzione Normale e la sua notorietà è legata ai cosiddetti *teoremi del limite centrale* che stabiliscono le condizioni sotto le quali la somma di variabili casuali tende alla normale all'aumentare del numero delle variabili.

La distribuzione Normale è indicizzata a due parametri, la media $\mu \in \Re$ e la varianza $\sigma^2 > 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \text{exp}\{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\} \qquad x \in \Re$$

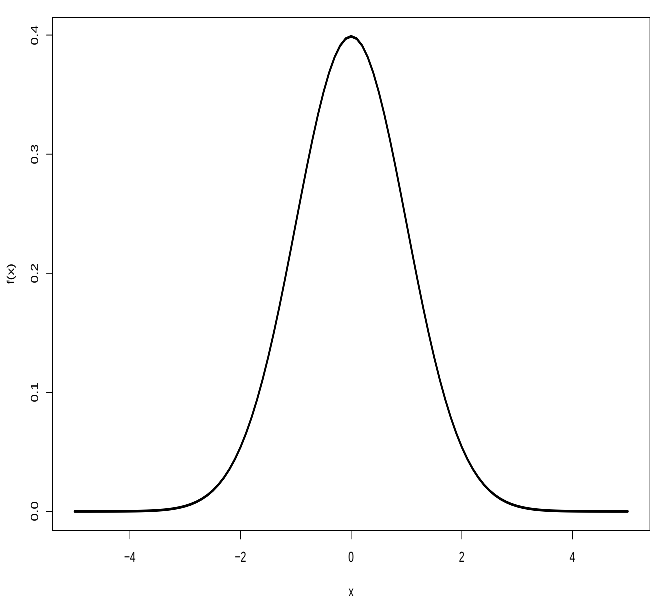
La funzione di ripartizione della VA Normale non ha un'espressione chiusa, la si può esprimere solo come integrale

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

questo integrale non è facile da calcolare ma per fortuna esistono delle tavole che, noto il valore di x danno il valore di $F_X(x)$ quando X ha una distribuzione Normale Standardizzata cioè con media nulla e varianza unitaria.

Una distribuzione **Normale Standardizzata** viene solitamente indicata con Z, risulta quindi:
$E(Z) = 0$ e
$V(Z) = 1$

Nella Figura è rappresentata la funzione di densità di una VA Normale standardizzata



Si possono standardizzare tutte le variabili casuali purchè abbiamo media finita e varianza non nulla (se la varianza è nulla non si parlerà più di VA o VC ma di costanti). Per standardizzare una VA le si sottrae la media e di divide per la deviazione standard cioè se X è una VA con $E(X) = \mu_X$ e $V(X) = \sigma_X^2$ la corrispondente VA standardizzata è

$$Y = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$$

e avremo che

$$E(Y) = 0$$

$$V(Y) = 1$$

Distribuzione T-Student

E', come la normale, una distribuzione *simmetrica*. Ha media nulla.

E' caratterizzata da un unico parametro detto "*gradi di libertà*" ed indicato con r.

La differenza rispetto alla distribuzione normale è che la T-Student ha le code più pesanti e quindi è caratterizzata da più dati estremi o anomali (molto grandi o molto piccoli) rispetto alla normale.

E' usata come distribuzione dei rendimenti di titoli che presentano maggior variabilità (varianza) che non quella ipotizzata dalla distribuzione normale

Anche per questa distribuzione esistono le tavole per trovare i quantili e gli integrali

Se X ha una distribuzione T-Student con r gradi di libertà

$$X \sim T(r)$$

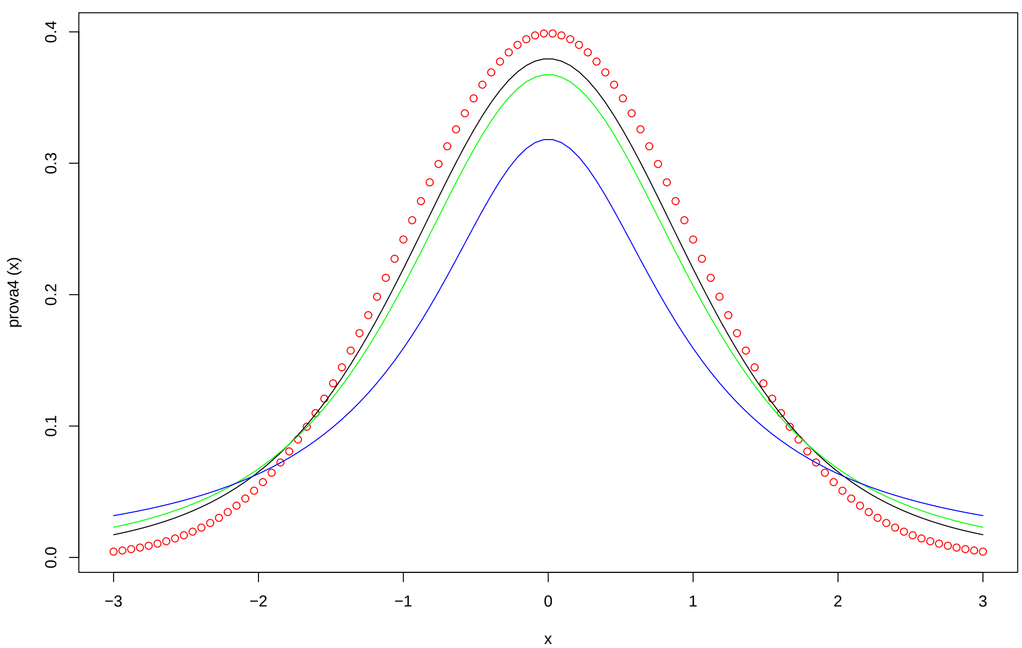
allora

$$E(X) = 0 \quad \text{e} \quad V(X) = \frac{r}{r-2}$$

con $r > 2$

Abbiamo inoltre che al crescere dei gradi di libertà la distribuzione T-Student tende ad avvicinarsi sempre di più ad una distribuzione normale e per $r \to \infty$ la distribuzione T-Student è una normale.

In figura la densità di una distribuzione normale standardizzata è disegnata per punti. Le altre 3 curve sono densità di distribuzione T-Student con rispettivamente 5, 3, 1 gradi di libertà



Distribuzione Chi-quadrato: χ^2

Non è una distribuzione simmetrica ma asimmetrica verso sinistra

Il carattere assume solo valori non negativi: $X \geq 0$

E' indicizzata da un unico parametro detto *gradi di libertà* , r, e risulta, se $X \sim \chi^2_r$, che:

$$E(X) = r \quad \text{e} \quad V(X) = 2r$$

Anche per questa distribuzione esistono le tavole per trovare i quantili e gli integrali